

[REFERAT NA KNM UAM WMI]

Asymptotyczna długość najdłuższego rosnącego podciągu w jednostajnie losowej permutacji: Diagramy Younga, algorytm Robinsona-Schensteda, miara Plancherela

Wojciech Pachowiak

January 2026

1 Wstęp

Referat na podstawie rozdziału pierwszego („Longest increasing subsequences in random permutations”) z Dan Romik, *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences* (2014). Obrazki również stamtąd pochodzą!

Definicja. Podciąg permutacji $\sigma \in S_n$ to ciąg $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k))$ taki, że $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

Definicja. Podciąg nazywamy **rosnącym**, jeżeli $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k)$.

Definicja. Długość maksymalnego podciągu rosnącego permutacji $\sigma \in S_n$ oznaczamy

$$L(\sigma) = \max \{1 \leq k \leq n : \sigma \text{ ma rosnący podciąg długości } k\}$$

Przykład.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = [4536172]$$

Kilka przykładowych podciągów rosnących: (4, 5, 6, 7), (4, 6), (1, 2), (3), (1, 7)

Podciąg maksymalny: (4, 5, 6, 7)

$$L(\sigma) = 4$$

Definicja. Średnia wartość $L(\sigma)$ po wszystkich permutacjach rzędu n :

$$\ell_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} L(\sigma) \quad \text{gdzie } \frac{1}{n!} = \frac{1}{|S_n|}$$

Definicja. Przez $\sigma_n : \Omega \rightarrow S_n$ oznaczmy zmienną losową, taką że $\forall \sigma \in S_n \mathbb{P}(\sigma_n = \sigma) = 1/n!$ (σ_n zwraca permutację według rozkładu jednostajnego na grupie permutacji S_n)

Obserwacja. $\ell_n = \mathbb{E}(L(\sigma_n))$

Przykład.

$$\ell_1 = 1, \quad \ell_2 = \frac{3}{2}, \quad \ell_3 = 2, \quad \ell_4 = \frac{29}{12}, \quad \ell_5 = \frac{67}{24}$$

$$S_3 = \{(), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\} = \{[123], [213], [231], [132], [321], [312]\}$$

$$\ell_3 = \frac{1}{6}(3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2) = 2$$

Pytanie. Jak zachowuje się ℓ_n dla $n \rightarrow \infty$? „Ulam–Hammersley problem”

Odpowiedź (pełna). Asymptotycznie dla $n \rightarrow \infty$:

$$\ell_n = 2\sqrt{n} + cn^{1/6} + o(n^{1/6}) \quad \text{gdzie } c = -1, 77108$$

(Baik, Deift, Johansson, 1998) „On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations”

Uwaga (Notacja małe o). $f(n) = o(g(n)) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Odpowiedź (uproszczona).

$$\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

Ponadto, dla losowej permutacji σ_n zachodzi również zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 2 \quad (\text{czyli } \forall \epsilon > 0 \text{ mamy } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\frac{L(\sigma_n)}{\sqrt{n}} - 2| > \epsilon) = 0)$$

(Z prawdopodobieństwem równym 1 losowa permutacja σ_n będzie miała najdłuższy podciąg długości $2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$)

- (Vershik, Kerov, 1977) „Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting shape of Young tableaux”
- (Vershik, Kerov, 1985) „The asymptotics of maximal and typical dimensions irreducible representations of the symmetric group”
- (Logan, Shepp, 1977) „A variational problem for random Young tableaux”

Plan. Opiszę drogę prowadzącą do odpowiedzi uproszczonej.

2 Patience sorting

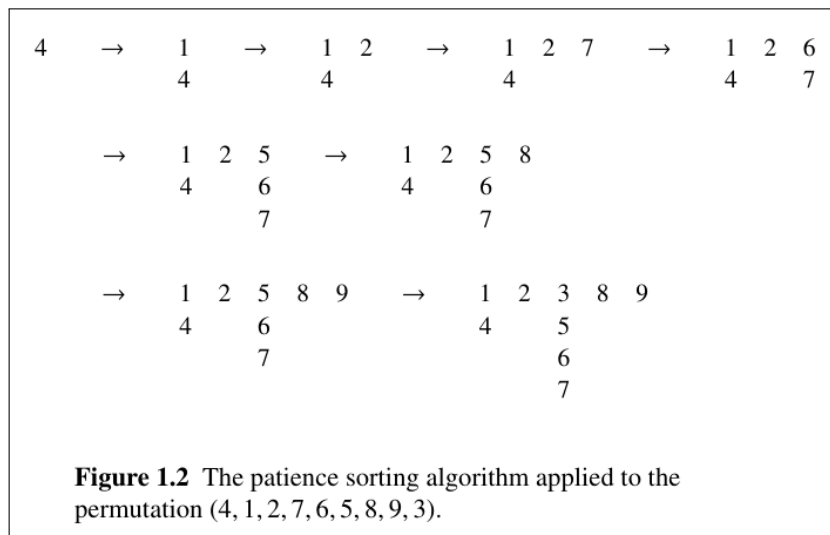
Pytanie. Mając konkretne $\sigma \in S_n$, jak obliczyć $L(\sigma)$?

Odpowiedź. *Patience sorting* (Ross, 1960) (po polsku: „Sortowanie przez łączenie naturalne”) („patience” to po polsku „pasjans”)

Algorytm. Po kolei wykreślamy wartości permutacji i umieszczamy je w rzędzie kolumn według następujących zasad:

- Sekwencyjnie porównujemy obecnie rozważaną liczbę x z liczbami znajdującymi się w najwyższym rzędzie.
- Jeżeli istnieje y z najwyższego rzędu taki, że jako pierwszy spełnia $x < y$, to umieszczamy x na szczycie kolumny, w której znajduje się y .
- Jeżeli x jest większe od każdej liczby z najwyższego rzędu, to umieszczamy x w osobnej kolumnie.

Przykład. $\sigma = [412765893]$



Przykład. $\sigma = [156432]$

Twierdzenie. Po zaaplikowaniu algorytmu *patience sorting* do permutacji $\sigma \in S_n$, końcowa liczba kolumn wynosi $L(\sigma)$.

Wniosek. Zamiast pytać o długość najdłuższego podciągu permutacji, możemy pytać o liczbę kolumn otrzymanych przez algorytm *patience sorting*.

3 Diagramy i tableaux Younga

Definicja. Podział liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ to zbiór liczb naturalnych, które sumują się do n . Równoważnie, zamiast zbioru możemy używać posortowanego ciągu (czyli wektora). Jeżeli λ jest podziałem n , to piszemy $\lambda \vdash n$.

Przykład.

$$n = 7, \lambda = (4, 2, 1) \vdash n$$

$$n = 7, \lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \vdash n$$

$$n = 7, \lambda = (6, 1) \vdash n$$

$$n = 7, \lambda = (3, 2, 2) \vdash n$$

$$n = 50, \lambda = (24, 10, 6, 3, 2, 2, 2, 1) \vdash n$$

Uwaga. Podział liczby n można przedstawić jako tzw. **diagram Younga** o n blokach. Podział liczby i jego diagram Younga będziemy oznaczać wspólnym symbolem λ .

Przykład.

$(4, 4, 3, 1, 1) \vdash 13 \leftrightarrow$ TUTAJ NARYSUJ DIAGRAM YOUNGA W KONWENCJI ANGIELSKIEJ

$(7, 5, 4, 4) \vdash 20 \leftrightarrow$ TUTAJ NARYSUJ DIAGRAM YOUNGA W KONWENCJI ANGIELSKIEJ

Definicja. (Standardowe) **tableaux Younga** to diagram Younga $\lambda \vdash n$, w którego blokach umieszczono liczby naturalne $1, 2, \dots, n$ w taki sposób, że liczby w wierszach i kolumnach są uporządkowane rosnąco.

Przykład.

Dla $\lambda = (4, 4, 3, 1, 1) \leftrightarrow$ TUTAJ NARYSUJ TABLEAUX YOUNGA W KONWENCJI ANGIELSKIEJ

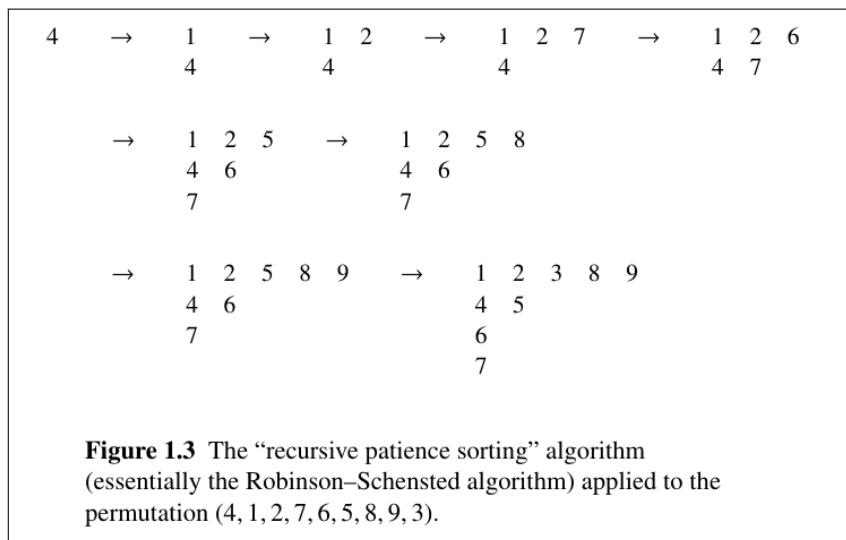
Dla $\lambda = (7, 5, 4, 4) \leftrightarrow$ TUTAJ NARYSUJ TABLEAUX YOUNGA W KONWENCJI ANGIELSKIEJ

4 Algorytm Robinsona-Schensteda

WWW. „RSK correspondence”

Algorytm. Tak samo jak patience sorting, ale liczbę zepchniętą w dół liczbę traktujemy jako wejście patience sorting zaaplikowanego do wiersza niżej.

Przykład. $\sigma = [412765893]$



Twierdzenie. Algorytm R-S dostaje permutację $\sigma \in S_n$ i zwraca trójkę (λ, P, Q) , gdzie λ jest diagramem Younga, a P, Q są tableaux Younga o kształcie λ .

Jest to bijekcja (mając trójkę, możemy odzyskać permutację).

Ponadto, mamy $L(\sigma) = \lambda_1$, gdzie λ_1 to długość pierwszego wiersza (od góry) λ .

Definicja. Przez d_λ oznaczmy **wymiar** λ , czyli liczbę tableaux, które można otrzymać z diagramu λ .

Wniosek. Dla każdego $n \geq 1$ mamy

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 = n!$$

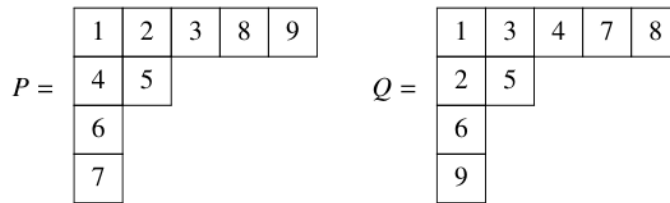


Figure 1.5 The insertion and recording tableaux generated by the Robinson–Schensted algorithm for the permutation $(4, 1, 2, 7, 6, 5, 8, 9, 3)$.

Dowód. P i Q mają kształt λ . Możemy utworzyć d_λ tableaux z P oraz d_λ tableaux z Q . Zauważmy też, że $n! = |S_n|$. \square

Uwaga. Tableaux P i Q nie będą nam już potrzebne w tym referacie. Zapomnijcie o nich.

Pytanie. Z jakim prawdopodobieństwem losowej permutacji σ_n algorytm R-S przypisze diagram λ ?

Odpowiedź. Algorytm R-S otrzymuje σ_n i zwraca losowy diagram Younga $\lambda^{(n)}$ o n blokach. Z poprzedniego wniosku wynika, że $\lambda^{(n)}$ ma kształt λ z prawdopodobieństwem równym:

$$\mathbb{P}(\lambda^{(n)} = \lambda) = \frac{d_\lambda^2}{n!}.$$

Powyzszą miarę prawdopodobieństwa nazywamy **miarą Plancherela** rzędu n .

Wniosek. Zamiast badać rozkład $L(\sigma_n)$ możemy badać rozkład $\lambda_1^{(n)}$, czyli rozkład długości pierwszego wiersza diagramów Younga losowanych według miary Plancherela rzędu n .

5 Kształt graniczny diagramów Younga losowanych według miary Plancherela

Definicja. Niech (i, j) będzie współrzędną diagramu Younga $\lambda \vdash n$ (i to indeks wiersza, j to indeks kolumny). Definiujemy **hook-length** jako funkcję:

$$h_\lambda(i, j) = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1,$$

zwracającą liczbę bloków na prawo i w dół od bloku (i, j) , włącznie z (i, j) . (λ'_j to liczba bloków w j -tej kolumnie)

Przykład. DODAĆ RYSUNKI DIAGRAMÓW YOUNGA W NOTACJI ANGIELSKIEJ I WPISAĆ LICZBY REPREZENTUJĄCE HOOK-LENGTH

$$(4) \implies 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

$$(3, 1) \implies 4 + 2 + 1 + 1 = 8$$

$$(2, 2) \implies 3 + 2 + 2 + 1 = 8$$

$$(7) \implies 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

$$(4, 1, 1, 1) \implies 7 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 19$$

$$(4, 2, 1) \implies 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 18$$

$$(3, 3, 1) \implies 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 18$$

Twierdzenie. Jeżeli $\lambda \vdash n$, to

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h_\lambda(i, j)},$$

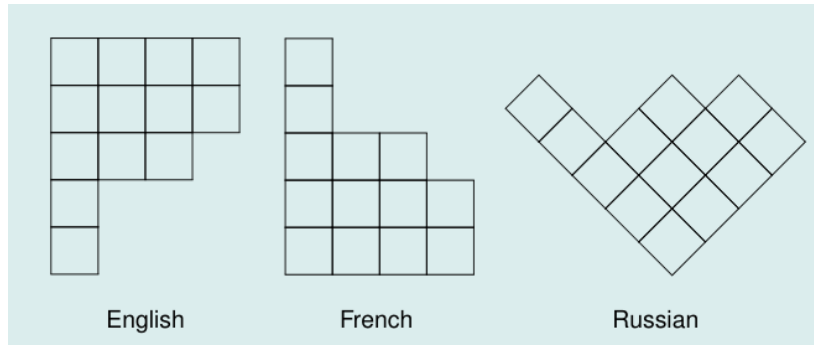
gdzie iloczyn przebiega współrzędne (i, j) wszystkich bloków w diagramie λ .

Przykład. $\lambda = (5, 2, 1, 1) \vdash 9$

$$d_\lambda = \frac{9!}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{362,880}{1920} = 189.$$

Uwaga (konwencje rysowania diagramów Younga).

WWW. „young diagram plancherel measure” w Google grafika + NARYSOWAĆ SZKICOWO NA TABLICY W KONWECJI ROSYJSKIEJ



Definicja. Przez \mathcal{F} oznaczmy zbiór funkcji $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ takich, że:

- (i) f jest nierosnąca,
- (ii) $\int_0^\infty f(x)dx = 1$,
- (iii) f ma zwarty nośnik, czyli $\text{supp } f = \text{sup} \{x \geq 0 : f(x) > 0\} < \infty$.

NARYSOWAĆ PRZYKŁAD

Uwaga. Każdy diagram Younga λ możemy potraktować jako funkcję $\phi_\lambda := \phi_n \in \mathcal{F}$, zdefiniowaną jako:

$$y(x) = \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda'_{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor + 1}$$

(dzięki skalowaniu przez \sqrt{n} , pole pod wykresem funkcji ϕ_n wynosi 1), gdzie λ'_i jest ilością bloków w i -tej kolumnie diagramu λ .

Twierdzenie. Asymptotycznie dla $n \rightarrow \infty$, dla każdego diagramu Younga o n blokach mamy:

$$\mathbb{P}(\lambda^{(n)} = \lambda) = \frac{d_\lambda^2}{n!} = \exp(-n(1 + 2I_{\text{hook}}(\phi_\lambda) + O(\frac{\log n}{\sqrt{n}}))),$$

gdzie $I_{\text{hook}}(\phi_\lambda)$ to ciągły odpowiednik funkcji $\log(\prod_{(i,j)} h_\lambda(i,j))$, który wyraża się wzorem:

$$I_{\text{hook}}(f) = \int_0^\infty \int_0^{f(x)} \log h_f(x,y) dy dx.$$

Uwaga.

- Im $I_{\text{hook}}(\phi_\lambda)$ mniejsze, tym bardziej prawdopodobne, że losowa permutacja $\lambda^{(n)}$ ma kształt λ .
- Zwiększenie $I_{\text{hook}}(\phi_\lambda)$ o stałą, zmniejsza $\mathbb{P}(\lambda^n = \lambda)$ razy stała.
- Zwiększenie n , magnifikuje efekt opisany w poprzednich dwóch itemach.

Problem. Znajdź $\phi_\lambda \in \mathcal{F}$, dla którego $I_{\text{hook}}(\phi_\lambda)$ jest najmniejsze (problem wariacyjny).

Definicja. Niech $\psi_\lambda := \psi_n$ będzie ciągłą funkcją, odpowiadającą diagramowi Younga λ narysowanemu w konwencji rosyjskiej, czyli powstałą przez obrót wykresu ϕ_n o 45° .

TUTAJ NARYSOWAĆ OBRAZEK PRZED I PO OBROTCIE

Bardziej formalnie, zachodzi zamiana współrzędnych:

$$y = \phi_n(x) \quad v = \psi_n(u) \quad u = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

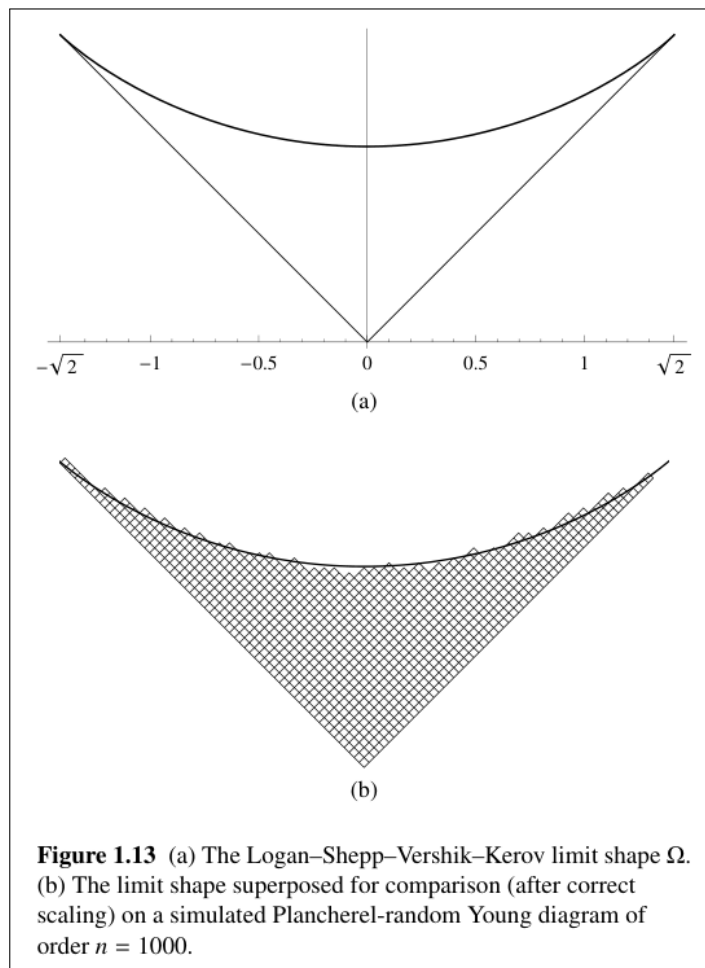
Definicja (Kształt graniczny Logana-Sheppa-Vershika-Kerova dla Plancherel-losowych diagramów Younga).

$$v(u) = \Omega(u) := \begin{cases} \frac{2}{\pi} (u \sin^{-1}(\frac{u}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2-u^2}) & |u| \leq \sqrt{2} \\ |u| & |u| > \sqrt{2} \end{cases}$$

Uwaga. $\Omega(\pm\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Twierdzenie (Vershik, Kerov, Logan, Shepp, 1977). Losowa funkcja ψ_n zbiega według prawdopodobieństwa, względem normy $\|\cdot\|_\infty$ do kształtu granicznego Ω , czyli:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\sup_{u \in \mathbb{R}} |\psi_n - \Omega| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



Wniosek. Obracamy ψ_n o -45° stopni, aby odczytać $x = \sup \text{supp } \phi_n$:

$$x = \frac{v + u}{\sqrt{2}} = \frac{\Omega(u) + u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

Odskalowujemy ϕ_n , aby uzyskać długość pierwszego wiersza diagramu Younga:

$$\lambda_1^{(n)} = x\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$$

Teraz machamy rękoma, aby uzasadnić, że $L(\sigma_n)/\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 2$ oraz $\ell(\sigma_n)/\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2$.

Uwaga. W dowodach, które pominąłem, wykorzystuje się następujące narzędzia analizy:

- transformatę Fouriera,
- transformatę Hilberta,
- ułamkową całkę i pochodną (pomijam założenia, przy których są dobrze zdefiniowane i są wzajemnymi odwrotnościami):

– całka Riemanna-Liouville’a

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{-1+\alpha} dt,$$

– pochodna Marchauda

$$(D_\alpha g)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

6 Dygresja o teorii reprezentacji

Definicja. Reprezentacją skończonej grupy G nazywamy homomorfizm $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, gdzie $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ jest grupą odwracalnych macierzy rzędu n nad ciałem \mathbb{C} . Liczbę n nazywamy **wymiarem** reprezentacji φ .

Każda skończona grupa ma nieskończoną ilość reprezentacji, ale tylko skończoną ilość (odpowiadającą ilości klas sprzężoności¹) reprezentacji **nierozkładalnych**. Każda reprezentacja może być rozłożona na sumę reprezentacji nierozkładalnych.

Uwaga. Główną motywacją badania diagramów Younga jest ich związek z **teorią reprezentacji**. Istnieje bijekcja:

nierozkładalne reprezentacje $S_n \leftrightarrow$ podziały liczby $n \leftrightarrow$ diagramy Younga o n blokach.

Uwaga. Wymiar nierozkładalnej reprezentacji S_n odpowiadającej podziałowi $\lambda \vdash n$ wynosi dokładnie d_λ (liczba standardowych tableau Younga na λ).

Uwaga. Jakiemu diagramowi Younga odpowiada nierozkładalna reprezentacja S_n o największym wymiarze? Równoważnie, który diagram Younga λ ma największe d_λ ? Dla skończonych n nie wiemy. Natomiast wiemy, że jeżeli $n \rightarrow \infty$, to do funkcji Ω zbiega funkcja ψ_n odpowiadająca diagramowi Younga μ_n , który ma najmniejsze $\prod_{(i,j) \in h_\lambda(i,j)}$, czyli największy wymiar d_{μ_n} .

¹Element $a \in G$ jest sprzężony z $b \in G$ jeśli istnieje taki $g \in G$, że $a = gb g^{-1}$. Relacja ta jest relacją równoważności, która dzieli G na rozłączne podzbiory zwane „klasami sprzężoności”.