

Część 1: Stała Cheegera w geometrii różniczkowej

(1)



UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

matinf.uj.edu.pl
fb/ WMIUJ

Wydział
Matematyki i Informatyki

Def (z Wikipedii: „Cheeger constant”):

W geometrii różniczkowej, izoperimetryczna stała Cheegera zawartości Riemannowskiej M nazywamy dodatnią liczbę:

$$h(M) = \inf_E \frac{\text{Surf}(E)}{\min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(B))}, \text{ gdzie } E \text{ jest hiperpowierzchnią}$$

dzielącą rozmaitość M na dwie rozłączne części A i B .

$\text{Surf}(E)$ – „pole” E (od „surface”)

$\text{Vol}(A)$ – „objętość” A (od „volume”)

Przykład:

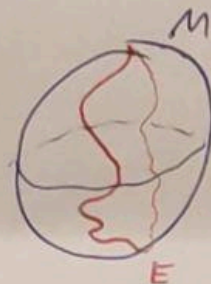
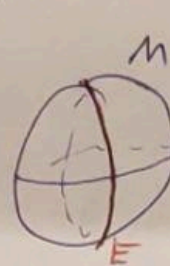
M – sfera

E – krzywa na sferze (np. koło)

A – ~~część~~ wycinek sfery (np. półkula)

$\text{Surf}(E)$ – długość krzywej

$\text{Vol}(A)$ – pole półsfery



Tw. (Nierówność Cheegera) [Jeff Cheeger 1970]

$\lambda_1(M) \geq \frac{h^2(M)}{4}$, gdzie $\lambda_1(M)$ jest najmniejszą dodatnią wartością własną operatora Laplasa – Beltramiiego na M .

Ciekawostki

„isos” = „równy, taki sam”

„perimeters” = „obwód”

Zobacz

„Isoperimetric problem / inequality”

Ćwiczenie 2: Stata Cheegera w teorii grafów. (2)



UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Matematyki i Informatyki

matinf.uj.edu.pl
fb/ WMIUJ

Def Niech $G=(V,E)$ będzie spójnym nieskierowanym skończonym grafem o wierzchołkami V i krawędziami E .

Def Dla ~~$A \subset V$~~ $A \subset V$ definiujemy "edge boundary" jako:
 $\partial A := \{ \{x,y\} \in E : x \in A, y \in A^c \}$ $A^c = V \setminus A$

Def $\text{Vol}(A) := \sum_{x \in A} \deg(x)$

Def Stata Cheegera grafu G nazywamy liczbę:

$$h_G^* := \min_{A \subset V} h_G(A), \text{ gdzie}$$

$$h_G(A) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{\min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(A^c))} : A \subset V, A \neq \emptyset \right\}$$

Wspomnij Alternatywnie nazywa to "edge expansion" / "edge isoperimetric number".
 Ma związek z grafami ekspanderynymi.

Obserwacje

- $h_G(A) = h_G(A^c)$

- $h_G^* \in (0,1]$

- $h_G^* \text{ małe} \Leftrightarrow$ ~~graf słabo połączony~~ istnieją dwa słabo połączone A i A^c ,
 (właśnie zadanie)

- $h_G^* \text{ duże} \Leftrightarrow$ dowolny podzbiór ~~ma wiele krawędzi prowadzących do A^c~~
 ma A i A^c ma wiele krawędzi między A i A^c w stosunku
 do ilości krawędzi wewnątrz A i wewnątrz A^c .

Zobacz

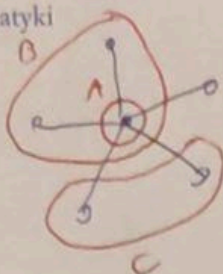
"Sparsest cut" ~~problem~~ "Graph partition"



(3)

Przykłady

① 5-gwiazda
 $G = S_5$



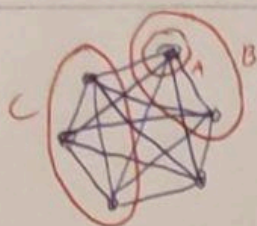
$$h_G(A) = \frac{1}{\min(1, 4)} = 1$$

$$h_G(B) = \frac{3}{\min(3, 1)} = 1$$

$$h_G(C) = \frac{2}{\min(2, 3)} = 1$$

$$h_G^* = 1$$

② $G = K_6$

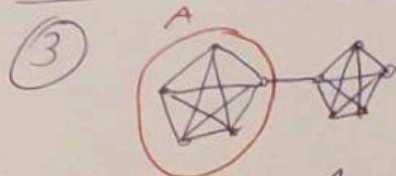


$$h_G(A) = \frac{1}{\min(1, 5)} = 1$$

$$h_G(B) = \frac{4+4}{\min(10, 20)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$h_G(C) = \frac{3+3+3}{\min(15, 15)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

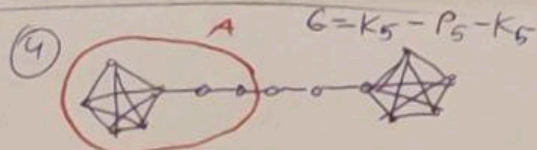
$$\Rightarrow h_G^* = 0,6$$



$$G = K_5 - P_2 - K_5$$

$$h_G(A) = \frac{1}{\min(4 \cdot 4 + 5, 4 \cdot 4 + 5)} = \frac{1}{21} \approx 0,05$$

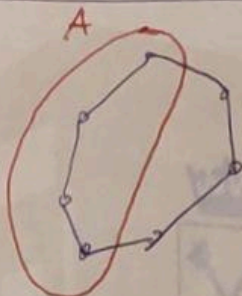
$$h_G^*$$



$$G = K_5 - P_5 - K_5$$

$$h_G(A) = h_G^* = \frac{1}{4 \cdot 4 + 5 + 22} = \frac{1}{25} \approx 0,04$$

⑤ 7-cyfel
 $G = C_7$



$$h_G(A) = h_G^* = \frac{2}{\min(4 \cdot 2, 3 \cdot 2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

⑥ $G = S_n$

$$h_G^* = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$G = K_n$

$$h_G^* = \frac{\lceil n/2 \rceil}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$h_G^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

⑧ $G = C_n$

$$h_G^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$h_G^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$h_G^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



Zastosowanie Projektowanie sieci ~~komputerowej~~ komputerowej, elektrycznej, etc.

Tw. Nierówność Cheegera dla grafów (Alon & Milman 1985)
 $2h_G^* \geq \lambda_1(G) > \frac{(h_G^*)^2}{2}$, gdzie $\lambda_1(G)$ jest najmniejszą dodatnią wartością własną znormalizowanego Laplasjana grafu G .

$$\mathcal{L}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x=y \text{ i } \deg(x) \neq 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{\deg(x)\deg(y)}} & \text{jeśli } \{x, y\} \in E, \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$$

Wniosek

małe $\lambda_1(G) \Leftrightarrow$ graf G jest słabo połączony / ma wiele gładko.

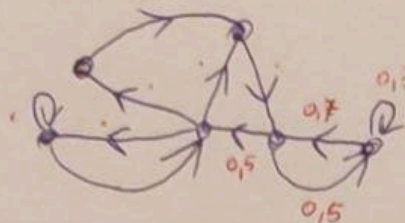
Ćwiczenie 3: Stała Cheegera dla Łańcuchów Markowa

(5)



UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Matematyki i Informatyki



matinf.uj.edu.pl
fb/ WMIUJ

Def Niech P będzie macierzą przejścia nielosowanego, nielosowego i odwracalnego skończonego Łańcucha Markowa o wartościach stężeń π i podległym grafie $G=(V,E)$

Fakty • $P^t(x,y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(y)$

• $\pi P = \pi$

• $\sum_{x \in V} \pi(x) = 1$ (π jest ~~macierzą~~ rozkładem prawdopodobieństwa)

• $\pi(x) = \frac{1}{\#(\tau_x^+ | X_0 = x)}$ gdzie $\tau_x^+ := \min \{t \geq 1 : X_t = x\}$
(czas pierwszego powrotu do stanu x)
(X_0 - stan początkowy, X_t - stan w czasie t)

Def Stała Cheegera dla Łańcuchów Markowa nielosowych

ciąga: $\Phi_P^* := \min \{ \Phi_P(A) : A \subset V, A \neq \emptyset \}$, gdzie

$$\Phi_P(A) = \frac{Q(A, A^c)}{\min(\pi(A), \pi(A^c))} = \frac{\sum_{\substack{x \in A \\ y \in A^c}} \pi(x) P(x,y)}{\min\left(\sum_{x \in A} \pi(x), \sum_{x \in A^c} \pi(x)\right)}$$

Wspomnienie: "conductance", "bottleneck ratio"

Obserwacje:

• $\Phi_P^* \in (0,1]$

• $\Phi_P(A) = \Phi_P(A^c)$

• $\Phi_P(A)$ jest ~~miarą~~ prawdopodobieństwem warunkowym:
rozpocząć spacer losowy w ~~zbiórze~~ mniej prawdopodobnym zbiorze (mniejszość)
i w jednym kroku wyjść poza ten zbiór (liczba)

• $\pi(x)$ mierzy udział prawdopodobieństwa rozpoczącia spaceru losowego w stanie $x \in V$.



Def Prostym spawem (osobym na spójnym $G=(V,E)$ nazywamy
Łańcuch Markowa o macierzy przejścia $S(x,y) = \frac{1}{\deg(x)}$.

Fakt. Łańcuch S jest nierozkładalny i odwracalny względem rozkładu
stacjonarnego $\pi(x) = \frac{\deg(x)}{2|E|}$

Obserwacja

$$\Phi_S(A) = \frac{\sum_{x \in A} \frac{\deg(x)}{2|E|} \cdot \frac{1}{\deg(x)}}{\min\left(\sum_{x \in A} \frac{\deg(x)}{2|E|}, \sum_{x \in A^c} \frac{\deg(x)}{2|E|}\right)} = \frac{\sum_{x \in A} 1}{\min\left(\sum_{x \in A} \deg(x), \sum_{x \in A^c} \deg(x)\right)}$$

$$= \frac{|A|}{\min(Vol(A), Vol(A^c))} = h_G(A)$$

Tw. Nierówność Chebysza dla Łańcuchów Markowa (Sinclair & Jerrum 1989)

$2\Phi_P^* \geq 1 - \lambda_1(P) \geq (\Phi_P^*)^2 \cdot \frac{1}{2}$, gdzie $\lambda_1(P)$ jest
drugą największą wartością własną macierzy P .

Uwaga Macierz $I-P$ nazywamy Laplasjensem, a $1 - \lambda_1(P)$ ~~jest~~ jego
najmniejszą dodatnią wartością własną.

PODSUMOWANIE