

Nieotwarte i nieograniczone zbiory zwarte

P. topologiczny X - zbiór, $\tau \subset P(X)$ jest topologią, gdy:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

3) $U_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigcup U_i \in \tau$

Preliminarium

$\downarrow$ [60 min]

$\nearrow$ domknięty, może być nieprekieralny

(X, τ) - p. top., ek. τ - zb. otwarte

P. metryczny dla X - zbiór, $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ jest

metryką, gdy:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) - p. metr.

P. normowany X - p. liniowa, $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ jest

normą, gdy:

$\Rightarrow \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

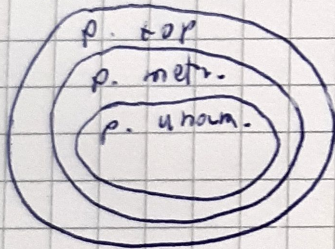
1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\lambda \in K, x \in X)$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ - p. norm.

Uwaga



Do: p. norm. jest metr. z $d(x, y) = \|x - y\|$.

p. metr. jest top. ze zb. otwartymi powstającymi jako sumy i przecięcia $K(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$

$\nearrow$ kula otw. ośr. x_0 i prom. r

Najogólniej zb. zwarty - z każdego pokrycia zb. otw.

można wybrać pokrycie skończone: $X \subseteq \bigcup_{u \in \mathcal{U}} U \Rightarrow$

$\exists i_1, \dots, i_n: X \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$

Zb. domknięty $= X \setminus A \in \tau \quad (X \setminus A \text{ otw.})$

A zb. ogr. w p. metr. $= \exists x \in X \exists r > 0 \quad A \subseteq K(x, r)$

A zb. ogr. w p. top. $= \exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x\| < r$
 $(= A \subseteq K(0, r))$

Zb. A otwarty $= \forall x \in A \exists U \in \tau \quad x \in U$

Domknięty zb. A

$A = \bigcap \{B \subseteq X: B \text{ domknięty}\} \Leftrightarrow \sup \{d(x, y): x, y \in A\} < \infty$

$\rightarrow$ w p. metr.

$A \text{ domknięty} \Leftrightarrow \forall (x_n) \in A \quad x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$

X zwarty - każdy c.c. ma granicę w X

$\rightarrow$ w p. metr. $A = A \cup \{\text{granice ciągów } (x_n) \in A\}$

	ułożone	metryczne	topologiczne
zwały	tak 1)	tak 1)	p. Hausdorffa 2)
domknięty			
zwały	tak 1)	tak 1)	nie
ograniczone			
domknięty i ograniczony	1)	3)	4)
zwały	skor. wymiar	zup. pod. ograniczone	ograniczone

zwały $\Rightarrow$ domkn. i ogr. to powierza zmianę fakt, że tylko w ułożonych, metrycznych!
co z ogólnymi topologicznymi?

$$X = \{0, 1\} \quad \tau = \{ \emptyset, \{0, 1\}, \{0\} \}$$

$\Leftarrow$ p. siłpińskiego, f. d. p. top. $\Rightarrow$ nie jest ani domknięty, ani otwarty

$\{0\}$ - zwały, w każdym pokryciu musi wystąpić $\{0\}$ lub $\{0, 1\}$ i on sam jest pokryciem skończonym

Ale $X \setminus \{0\} = \{1\}$ nie jest otwarty ($\notin \tau$) $\Rightarrow \{0\}$ nie jest domknięty

(X, τ) nie jest Hausdorffa - 0 i 1 nie oddzielamy zbiorem otwartym
[bo 1 nie tylko do $\{0, 1\} \ni 0$]

Tw. (X, τ) - p. Hausdorffa, $A \subset X$, A - zwały $\Rightarrow A$ domknięty

Pokażemy, że $X \setminus A$ - otwarty

Niech $x \in X \setminus A$, $y \in A$, $\exists U_y, V_y \subset X$, $U_y \cap V_y = \emptyset$, $x \in U_y$, $y \in V_y$

$\{V_y | y \in A\}$ - otwarte pokrycie A , można wybrać skończone $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$

$$V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n} \cap U_x = \emptyset \Rightarrow U_x \cap A = \emptyset \Rightarrow U_x \subset X \setminus A$$

$\uparrow$
otwarte otoczenie
 $X \setminus A$ otwarty

W ogólnym przypadku top. nie jest zdef. ograniczoności, więc można by rozjść na Twierdzenie i powiedzieć: NIE, zwały $\nRightarrow$ ograniczony (nie dajmy się na techniczne)

Problem Ograniczoność jest właściwa metryki, a nie topologii

Przykład (X, d) - p. metr., $D(x, y) = \min(1, d(x, y))$

d, D są równoważne: $(x_n) \subset X$, $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \ D(x_n, x) < 1$

(czyli generują tę samą zb. otwartość)

topologicznie

$$(x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{D} x)$$

$$x_n \xrightarrow{D} x, \ D(x_n, x) \rightarrow 0$$

$$\exists N \forall n \geq N \ D(x_n, x) < 1$$

$$D(x_n, x) = d(x_n, x) \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$$

W D historycznie jest ogr. (zawsze $D(x, y) \leq 1$), jeżeli $X = (R, | \cdot |)$, to tu tak nie jest

Nie da się tak zdef. ogr. w ogólnym przestr. top., by pokrywał pokrycie to z metryki

Pomysł co pokrycie zdef. ogr. tak: $A \subset X$ jest ogr. i gdy $\bar{A}$ jest zwarte

(czyli ograniczony, by zwarte było ogr., to nam podpowiedza intuicja) (czy wtedy ogr. zdef. będzie to samo co ogr. w metryce?)

Ale: $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ wtedy $K(x, \frac{1}{2}) \subset \{x\} \Rightarrow \{x\}$ otwarty $\Rightarrow$ każdy zb. otw., każdy domknięty.

Taki A niekiedy jest ogr., a jego domkn. $= A$ nie jest zwarte

Tł. def. też nie pomaga. (pomysł wypracować tabelkę, nie idzie z metryką, nie da się wypr. skończyć)

Jedyny p. metr. domkn. i ogr. $\Rightarrow$ zwarte? Wtedy, gdy A ogr. $\Rightarrow A$ całkowicie ogr.

malat his
sunda kab)

[illegible][illegible]

providing det. of microscopic

upward in det. open microwave

1) katoly podoba w. og. jest og.
2) skoniwana jma w. og. jest og.

[illegible]

Wird $\bigcup A_i \subset K(x_0, r)$, so:

Ukmergė ² - uždavinys
depinant to pr. lap. 2 dalyje aprašoma.

D: ~~czyli~~ gdyż $X \setminus B$ ogr., to $B \cup X \setminus B$ musi być ogr., a nie jest $\square$

(to p. dop. shokh.)

→ holiday school

Wied ~~z~~ $\theta = \mathbb{N}$ - otwarty i nieograniczony

Wzrosty domowy $u \in \mathcal{U}$. $N \setminus u$ jest skończony

Jeśli $x_1 \notin M_0 \cup M_1$, to według $M_2 \in \mathcal{U} : x_1 \in M_2$, jeśli $x_2 \in M_0 \cup M_1$,
to podobnie.

czyli N jest rzadki, podobnie jak dowolny inny zb. otwarty
i nieogr. ~~nie jest~~ $\neq \emptyset$

Tabellen:

Andenkingen werden dort. i. v. d. skov.
Th. Skov (person) (white)

→ left example!

dał przykład $X = \mathbb{R}$ $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : X \setminus A \text{ preliczelny}$

(to jest top. preliczelny)

Stopologia,
sprawdzamy jak poprzednio

Zb. ogr. = zb. preliczelne [1) i 2) się zgadzi] ✓

$\mathbb{N}$ - ogr. i domkn., bo $X \setminus \mathbb{N}$ otw., bo $X \setminus (X \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{N}$ - prelic.

Wziąć $U_0 = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $U_1 = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{1\})$, ...

... $U_n = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{n\})$, ...

U_n otw., bo $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{n\})) = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ - prelic.,

$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$, nie da się wybić punktu i horiz.,

bo $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \cap U_k = \{k\}$

Tabelka!

$\mathbb{N}$ domkn. i ogr., niezamknięty