O co chodzi z tymi rozmaitościami?

Bartosz Repczyński

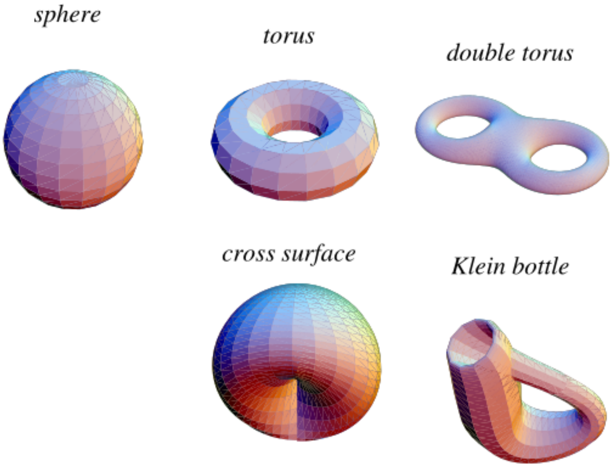
Seria minireferatów KNM

15 grudnia 2025

Uniwersytet
im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

O czym będziemy mówić?

Co to są rozmaitości?



Rozmaitości topologiczne

Definicja.

Przestrzeń Hausdorffa M nazywamy rozmaitością topologiczną, jeśli:

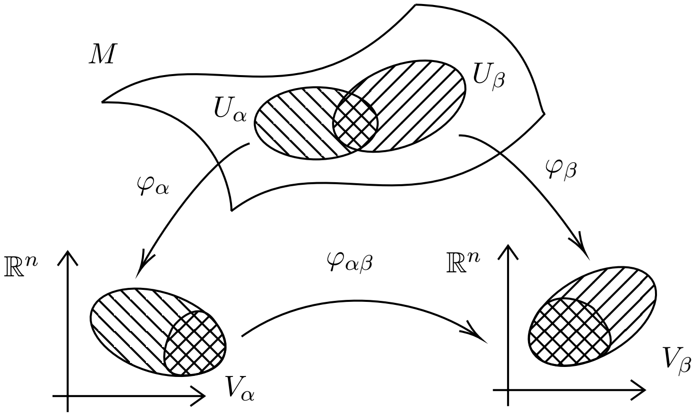
1. istnieje otwarte pokrycie $M = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$ oraz homeomorfizm $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ dla każdego U_α w zbiór otwarty $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.
2. dla każdego $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   jest homeomorfizmem.

Liczbę n nazywamy wymiarem rozmaitości M. Para $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tworzy układ współrzędnych.

Rozmaitości topologiczne



Klasyfikacja rozmaitości

Podać listę n-rozmaitości i twierdzenie mówiące, że każda n-rozmaitość jest homoemorficzna do jednej rozmaitości z listy, razem z wszystkimi niezmiennikami pomagającymi ustalić gdzie przypisać tą rozmaitość.

Klasyfikacja rozmaitości

Podać listę n-rozmaitości i twierdzenie mówiące, że każda n-rozmaitość jest homoemorficzna do jednej rozmaitości z listy, razem z wszystkimi niezmiennikami pomagającymi ustalić gdzie przypisać tą rozmaitość.

Twierdzenie. (Klasyfikacja powierzchni)

Każda zwarta rozmaitość jest homeomorficzna ze sferą lub powierzchnią skończonego genusu lub ze sumą spójną powierzchni rzutowych.

Klasyfikacja rozmaitości

Podać listę n-rozmaitości i twierdzenie mówiące, że każda n-rozmaitość jest homoemorficzna do jednej rozmaitości z listy, razem z wszystkimi niezmiennikami pomagającymi ustalić gdzie przypisać tą rozmaitość.

Twierdzenie. (Klasyfikacja powierzchni)

Każda zwarta rozmaitość jest homeomorficzna ze sferą lub powierzchnią skończonego genusu lub ze sumą spójną powierzchni rzutowych.

Hipoteza Poincaré.

Każda 3-rozmaitość M z $\pi_1(M) = 0$ jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową.

Hipoteza Poincaré jest jedynym rozwiązanym Problemem Milenijnym. Dokonał tego Grigorij Perelman w 2003 roku.

Zanurzenia rozmaitości

Gładkie odwzorowanie pomiędzy dwoma gładkimi rozmaitościami $F : M \to N$ jest gładką immersją, jeśli jego różniczka jest różnowartościowa w każdym punkcie. Gładkim zanurzeniem M w N nazywamy immersję $F : M \to N$, która jest dodatkowo homeomorficzna na swój obraz $F(M) \subset N$.

Twierdzenie. (Whitney'a o zanurzeniu)

Każda gładka n-rozmaitość z brzegiem lub bez posiada właściwe, gładkie zanurzenie w przestrzeń $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Całkowanie

Dla rozmaitości możemy wyrazić dalekgo idące uogólnienie zasadniczego twierdzenia rachunku całkowego.

Twierdzenie. (Stokesa)

Niech M będzie zorientowaną, gładką n-rozmaitością z brzegiem oraz niech ω będzie $(n-1)$-formą o zwartym nośniku na M. Wtedy

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Grupy Liego

Definicja.

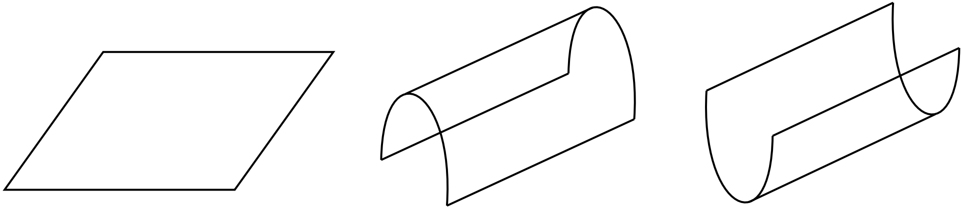
Grupą Liego nazywamy gładką rozmaitość G (z brzegiem), która jest jednocześnie grupą w sensie algebraicznym, taką że mnożenie i branie odwrotności są gładkie jako operacje.

Przykład.

$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \, : \, \det A \neq 0\}$

Rozmaitości Riemanna

Głównym problemem jest teraz *krzywizna*, która wyraża się krzywizną Gaussa. Korzystamy z narzędzi geometrii różniczkowej.



$K = 0$ $K > 0$ $K < 0$

Metryka Riemanna

Definition

Metryką Riemanna na gładkiej rozmaitości M nazywamy 2-pole tensorowe $g \in \mathcal{T}^2(M)$, które jest symetryczne ($g(X,Y) = g(Y,X)$) oraz dodatnio określone ($g(X,X) > 0$, dla $X \neq 0$). Metryka Riemanna wyznacza iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznej T_pM

$$\langle X, Y \rangle := g(X,Y).$$

Rozmaitość M wraz z metryką Riemanna tworzy rozmaitość riemannowską.

Metryka Riemanna

Definition

Metryką Riemanna na gładkiej rozmaitości M nazywamy 2-pole tensorowe $g \in \mathcal{T}^2(M)$, które jest symetryczne ($g(X,Y) = g(Y,X)$) oraz dodatnio określone ($g(X,X) > 0$, dla $X \neq 0$). Metryka Riemanna wyznacza iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznej T_pM

$$\langle X, Y \rangle := g(X,Y).$$

Rozmaitość M wraz z metryką Riemanna tworzy rozmaitość riemannowską.

Przykład.

Dla $M = \mathbb{R}^n$ i $g = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$, (M,g) jest rozmaitością Riemanna.

Zupełność rozmaitości Riemanna

Odległości mierzymy po krzywych. Krzywa geodezyjna to krzywa będąca najkrótszą krzywą pomiędzy dwoma punktami. Rozmaitość Riemanna jest geodezyjnie zupełna, jeśli każda geodezyjna jest określona dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie. (Hopfa–Rinowa)

Spójna rozmaitość Riemanna jest geodezyjnie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy jest zupełna jako przestrzeń metryczna.

Wzór Gaussa–Bonneta

Twierdzenie. (Wzór Gaussa-Bonneta)

Niech γ będzie zakrzywionym wielokątem na zorientowanej 2-rozmaitości Riemanna (M, g) oraz γ jest dodatnio zorientowany jako brzeg zbioru otwartego Ω o zwartym domknięciu. Wtedy

$$\int_\Omega K dA + \int_\gamma \kappa_N ds + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi,$$

gdzie K jest krzywizną Gaussa g, dA jest elementem objętości Riemanna, κ_N znakiem krzywizny, ε_i są kątami zewnętrznymi γ.

Co daje Gauss-Bonnet?

Wniosek.

1. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie euklidesowym jest równa π.
2. Obwód euklidesowego koła o promieniu R jest równy $2\pi R$.
3. Jeśli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jest jednostkową prostą krzywą zamkniętą taką, że $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ i N jest wewnętrznym wektorem normalnym, to

$$\int_a^b \kappa_N(t)dt = 2\pi.$$

Ogólny Gauss–Bonnet

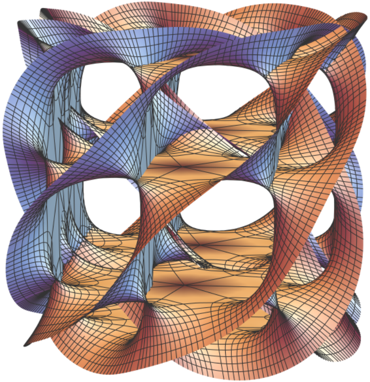
Twierdzenie. (Ogólny wzór Gaussa–Bonneta)

Jeśli M jest triangularyzowaną, zwartą, zorientowaną, 2-rozmaitością Riemanna. Wtedy

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

Rozmaitości zespolone

Najlepsze rozmaitości. Przekrój analizy zespolonej, algebry, geometrii algebraicznej, topologii, geometrii różniczkowej itd.



Wiązki wektorowe i liniowe

Definicja.

Niech M będzie rozmaitością topologiczną. Zespoloną wiązką wektorową stopnia k nad M nazywamy przestrzeń E razem z surjekcją $\pi : E \to M$, taką że każde włókno $E_p = \pi^{-1}(p)$ posiada strukturę k-wymairowej zespolonej przestrzeni liniowej i każdy punkt $p \in M$ posiada otoczenie U nad którym istnieje lokalna trywializacja wiązki, która jest homeomorfizmem $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ obcinającym się do izomorfizmu liniowego z E_q do $\{q\} \times \mathbb{C}^k$ dla każdego $q \in U$.

Wiązka liniowa to wiązka wektorowa stopnia 1. Jeśli π jest holomorficzne i trywializacja może być biholomorficzna, to mamy holomorficzną wiązkę.

Rozmaitości rzutowe

Definicja.

Zespolona przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}_n$ to zbiór 1-wymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{C}^{n+1}$. Identyfikujemy ją z $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ z relacją równoważności: $z \sim z'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z' = \lambda z$ dla $\lambda \neq 0$.

Twierdzenie (Chowa).

Każda domknięta podrozmaitość $\mathbb{P}_n$ jest algebraiczna.

Rozmaitości Kählera

Definicja.

Rozmaitość zespoloną na której istnieje gładka, zamknięta, dodatnia $(1,1)$-forma (forma Kählera) definiująca metrykę Kählera nazywamy rozmaitością Kählera.

Forma Kählera jest zamknięta więc wyznacza klasę kohomologii $[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ zwaną klasą Kählera tej metryki.

Przykład.

Forma

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{1}{2} \bar{\partial} \partial \log \frac{|w^\alpha|^2}{|w|^2}$$

zadaje metrykę Kählera zwaną metryką Fubiniego–Strudy'ego.

Rozmaitości Hodge'a

Definition

Rozmaitość Kählera wyposażoną w metrykę postaci

$$\omega_h = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \log h_\alpha}{\partial z_\alpha^j \partial \bar{z}_\alpha^k} dz_\alpha^j \wedge d\bar{z}_\alpha^k$$

nazywamy rozmaitością Hodge'a.

Przykład.

$\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ z ω_{FS} tworzy rozmaitość Hodge'a.

Twierdzenie.

Każda zespolona podrozmaitość $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ jest Hodge'a.

Zanurzenie w przestrzeń rzutową

Twierdzenie. (Kodairy o zanurzeniu / Wiązki liniowe)

Zwarta zespolona rozmaitość jest rzutowa wtedy i tylko wtedy, gdy posiada dodatnią holomorficzną wiązkę liniową.

Twierdzenie. (Kodairy o zanurzeniu / Geometryczne)

Zwarta zespolona rozmaitość jest rzutowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością Hodge'a.

Zakończenie

Dziękuję za uwagę!

Literatura

Znajdź kogoś kto będzie na ciebie patrzył tak, jak John M. Lee patrzy na rozmaitości.