

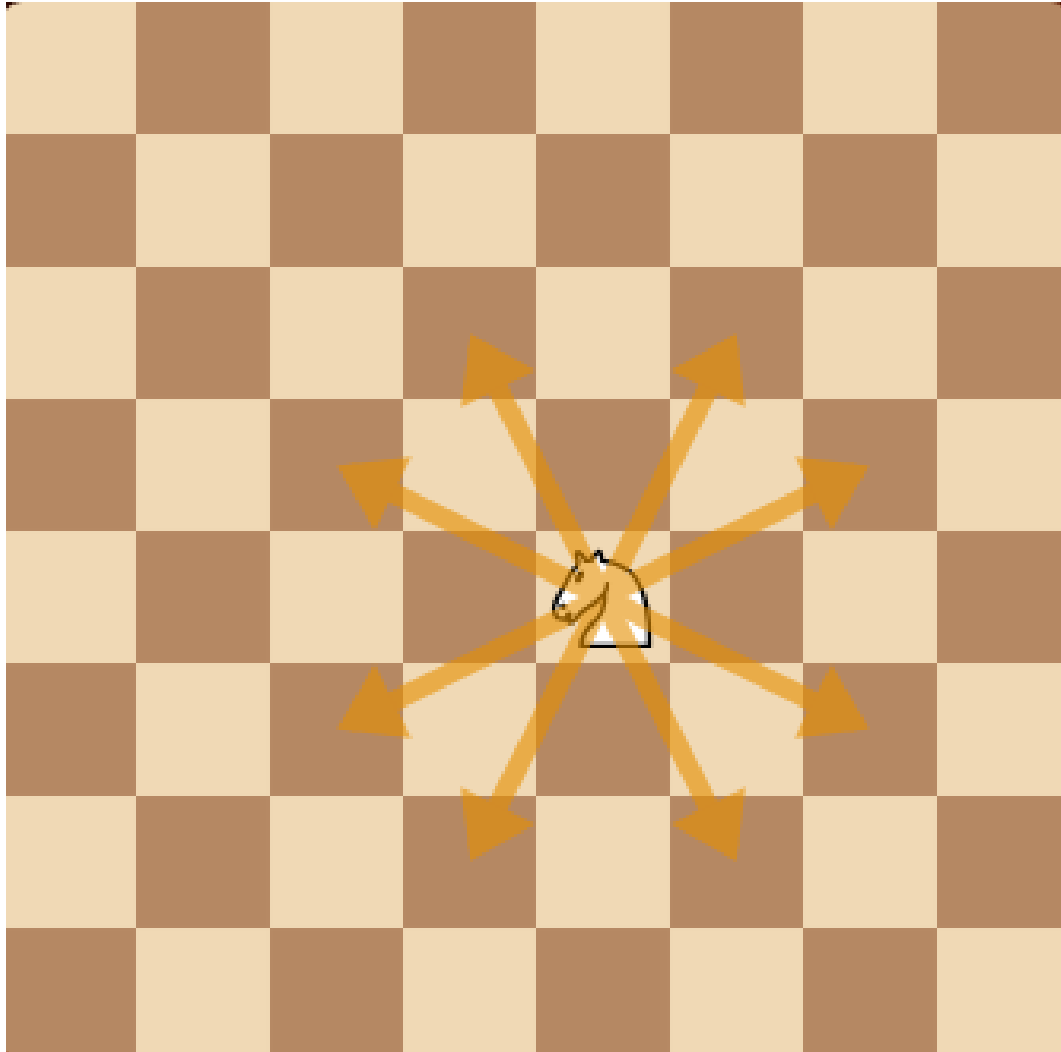
Grafy hamiltonowskie na szachownicy

Zuzanna Szeląg

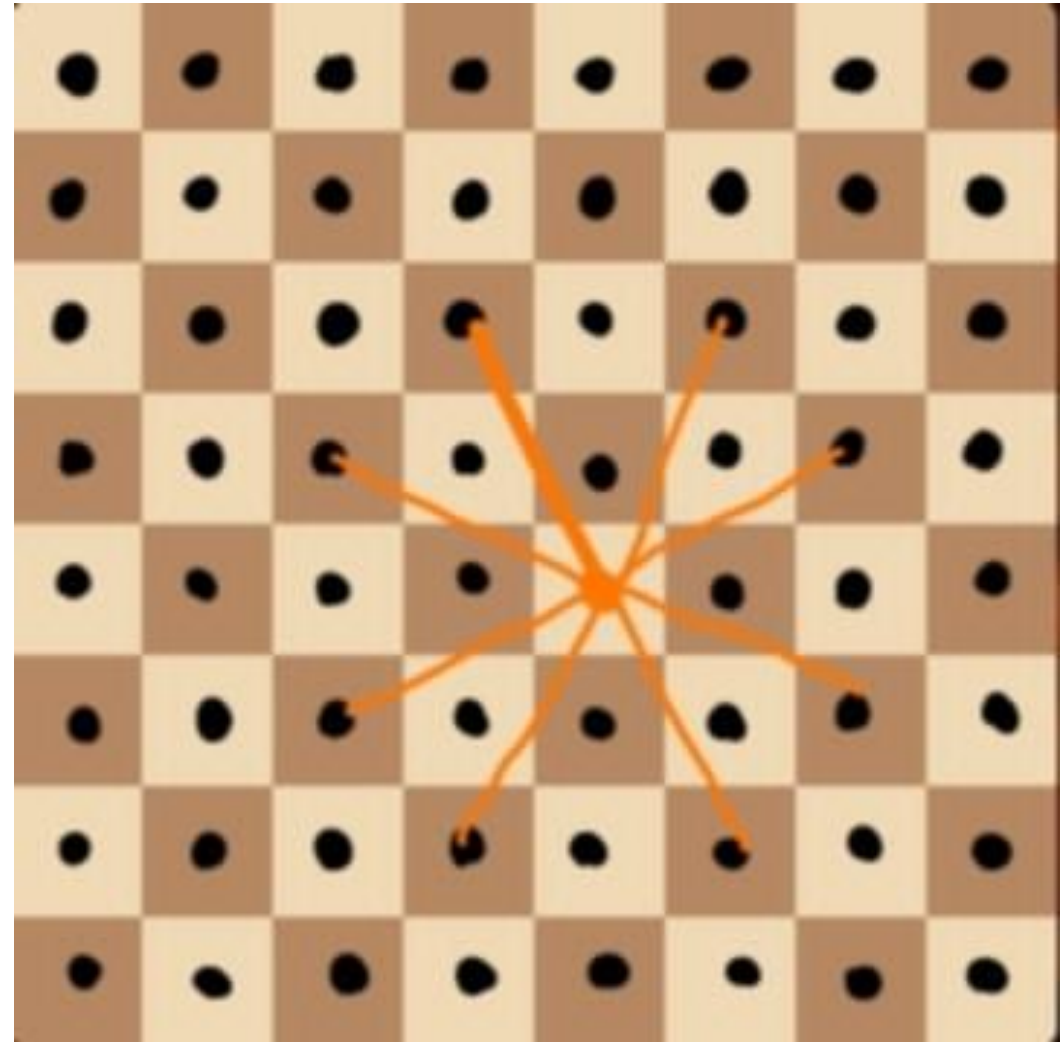
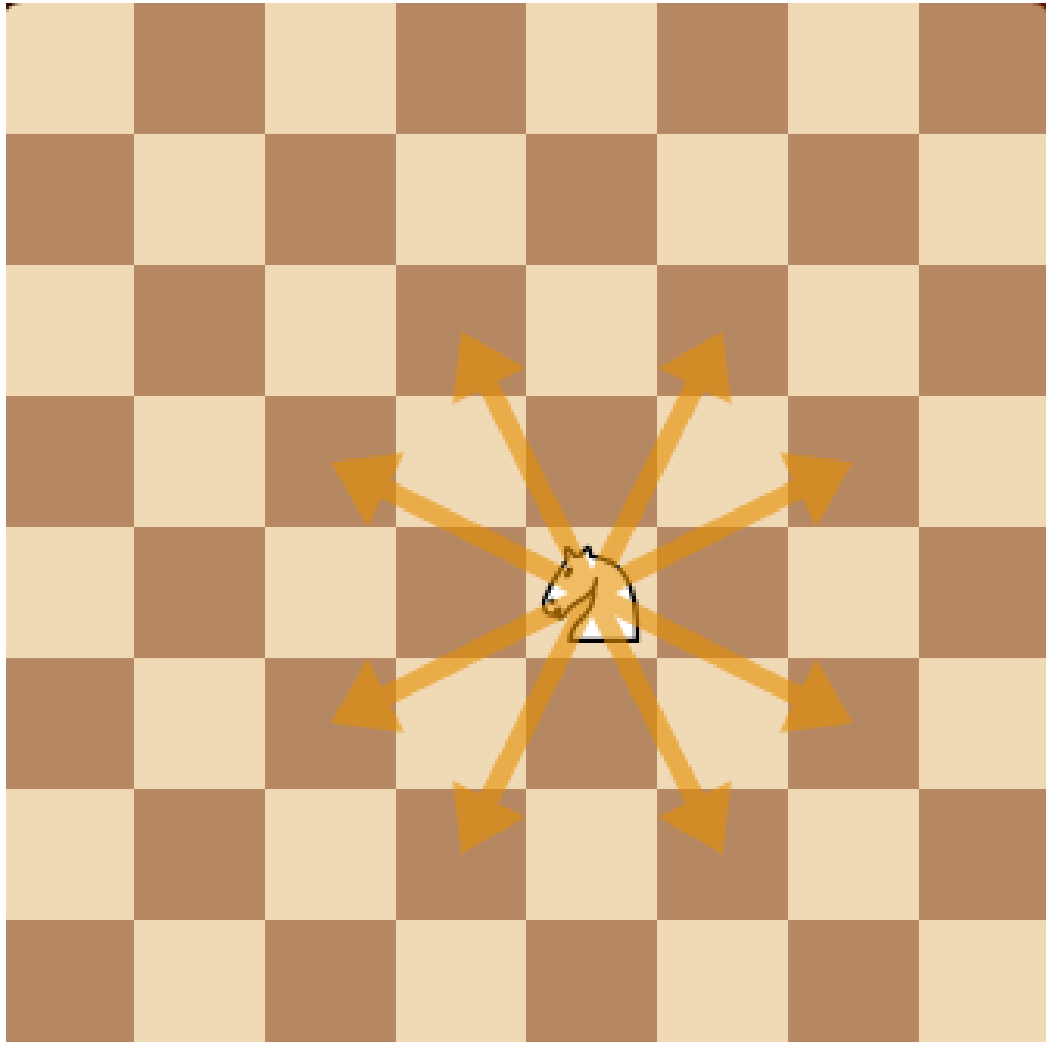
Problem trasy skoczka

22	11	36	53	20	13	38	51
35	54	21	12	37	52	17	14
10	23	56	33	16	19	50	39
55	34	09	24	49	40	15	18
26	07	48	57	32	01	42	63
47	58	25	08	41	62	31	02
06	27	60	45	04	29		43
59	46	05	28	61	44	03	30

Co ten problem ma wspólnego z teorią grafów?



Co ten problem ma wspólnego z teorią grafów?



Jak jest z
szachownicami
innymi rozmiarów???

Twierdzenie [Allen Schwenk, 1991]

Dla szachownicy $m \times n$ ($m \leq n$) istnieje zamknięta trasa skoczka (**cykl Hamiltona**), chyba że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

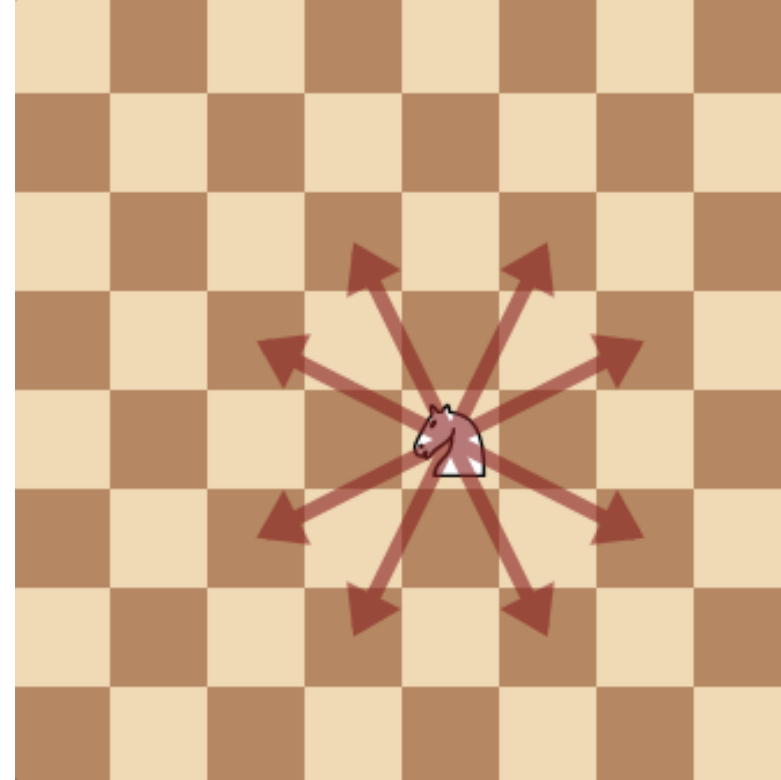
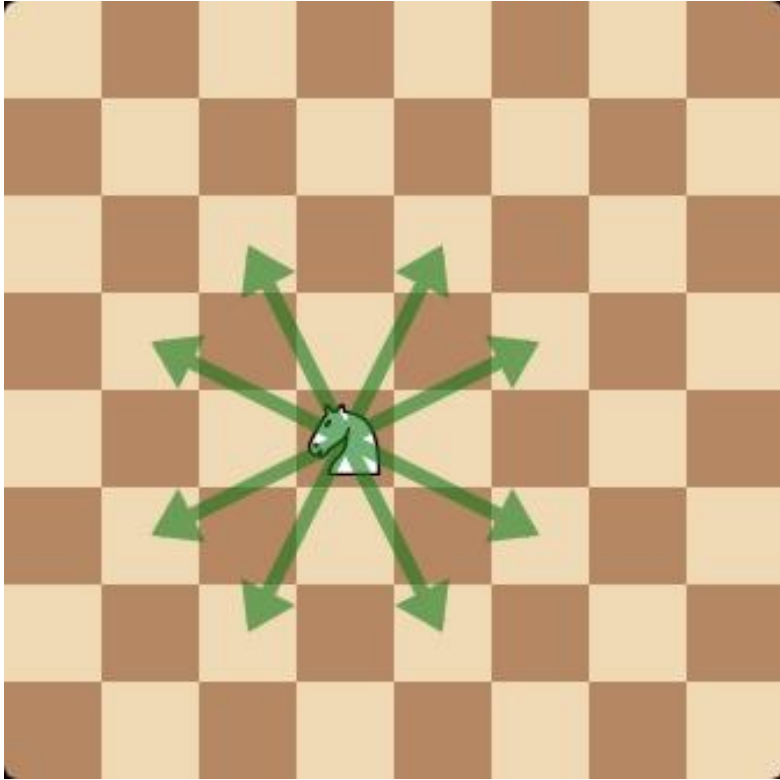
(a) m i n są jednocześnie nieparzyste,

(b) $m=1$, 2 lub 4,

(c) $m=3$ i $n=4$, 6 lub 8.

(a) m i n są jednocześnie nieparzyste

(a) m i n są jednocześnie nieparzyste



Skoczek z czarnego pola zawsze rusza na białe i odwrotnie.

(b) $m=1, 2 \text{ lub } 4$

- $m=1$

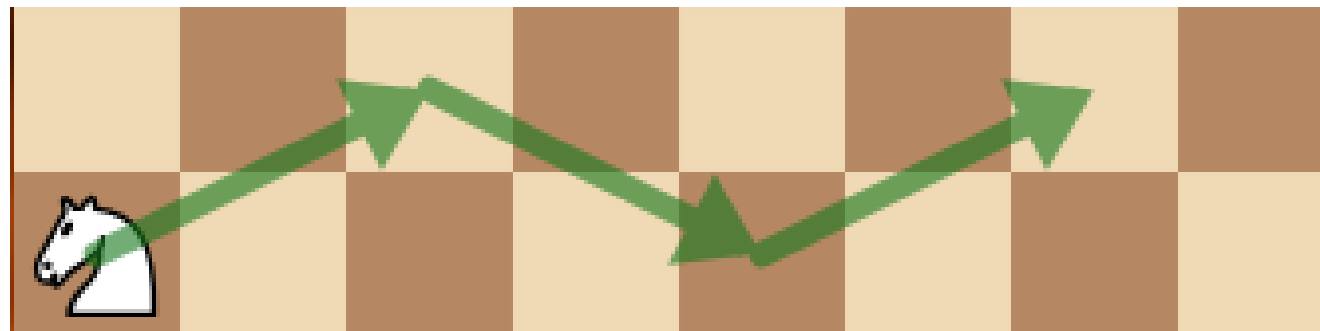


(b) $m=1, 2 \text{ lub } 4$

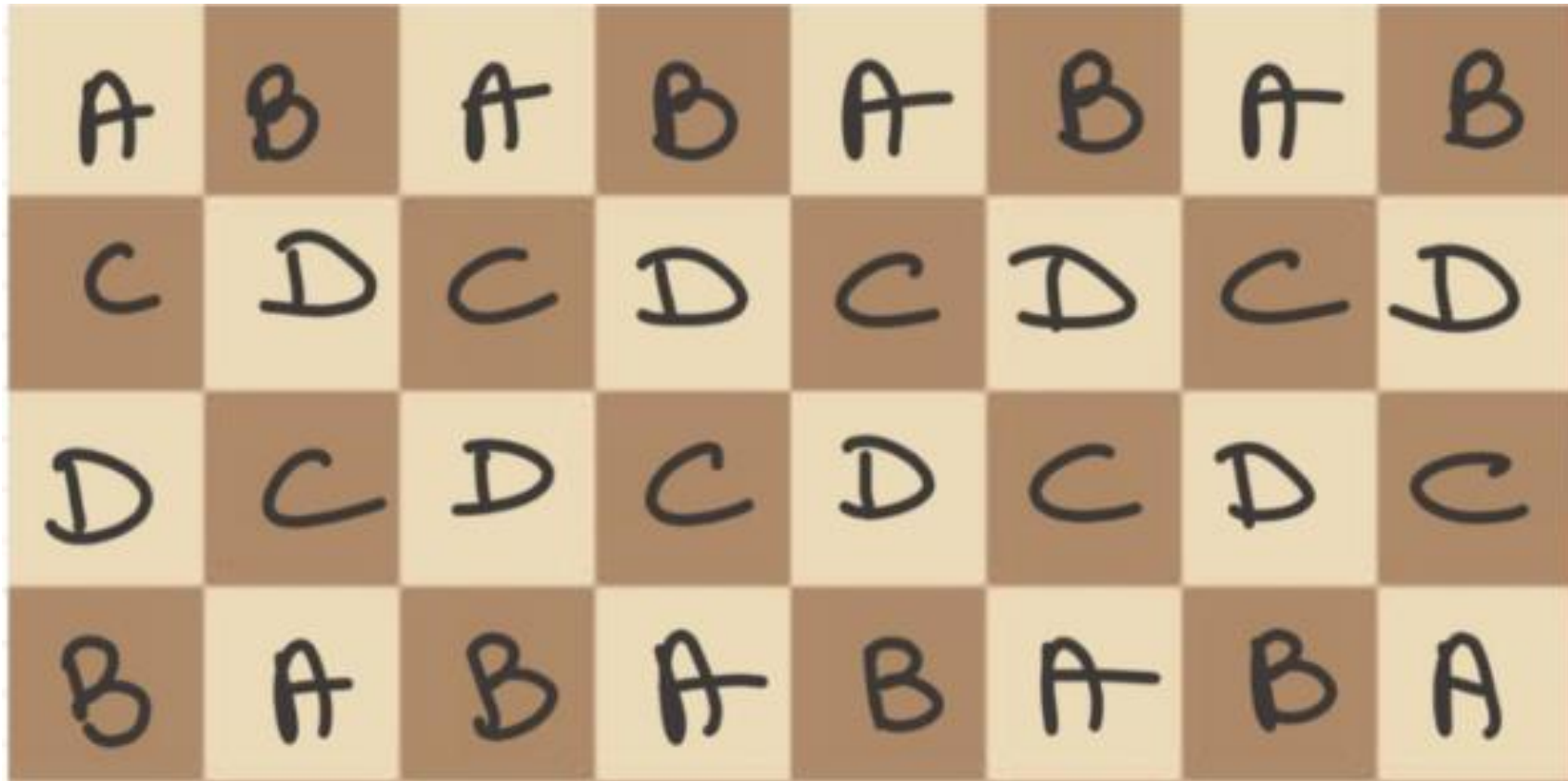
- $m=1$



- $m=2$



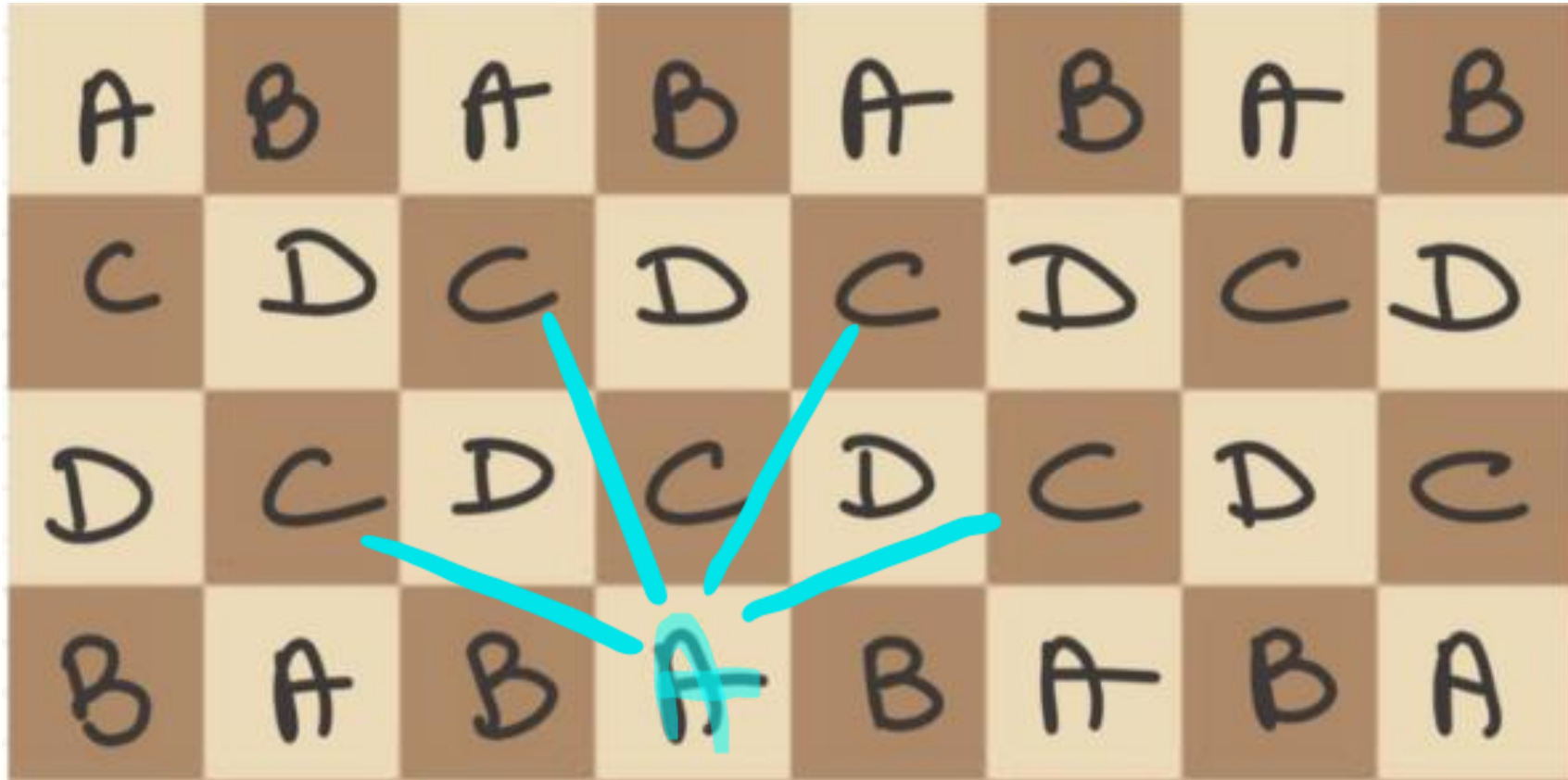
- $m=4$



An 8x4 grid of letters A, B, C, and D on a checkerboard background. The letters are arranged in a repeating pattern of 2x2 blocks. The top-left block contains A, B, C, D; the top-right block contains A, B, D, C; the bottom-left block contains D, C, B, A; and the bottom-right block contains C, D, A, B. The letters are written in a stylized, handwritten font.

A	B	A	B
C	D	C	D
D	C	D	C
B	A	B	A

- $m=4$



(c) $m=3$ i $n=4, 6$ lub 8 .

- $m=3$ i $n=4$
Argument taki sam jak dla $m=4$.
- $m=3$ i $n=6$

(c) $m=3$ i $n=4, 6$ lub 8 .

- $m=3$ i $n=4$
Argument taki sam jak dla $m=4$.
- $m=3$ i $n=6$

Własność grafu hamiltonowskiego:

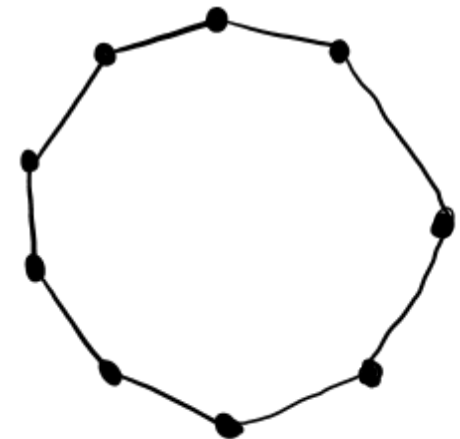
Po usunięciu k nieincydentnych wierzchołków dostajemy co *najwyżej* k spójnych części grafu.

(c) $m=3$ i $n=4, 6$ lub 8 .

- $m=3$ i $n=4$
Argument taki sam jak dla $m=4$.
- $m=3$ i $n=6$

Własność grafu hamiltonowskiego:

Po usunięciu k nieincydentnych wierzchołków dostajemy co *najwyżej* k spójnych części grafu.

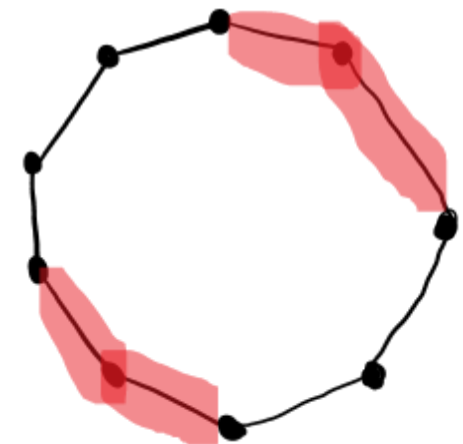


(c) $m=3$ i $n=4, 6$ lub 8 .

- $m=3$ i $n=4$
Argument taki sam jak dla $m=4$.
- $m=3$ i $n=6$

Własność grafu hamiltonowskiego:

Po usunięciu k nieincydentnych wierzchołków dostajemy co *najwyżej* k spójnych części grafu.

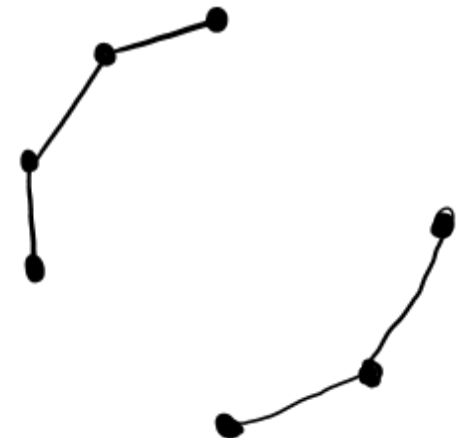


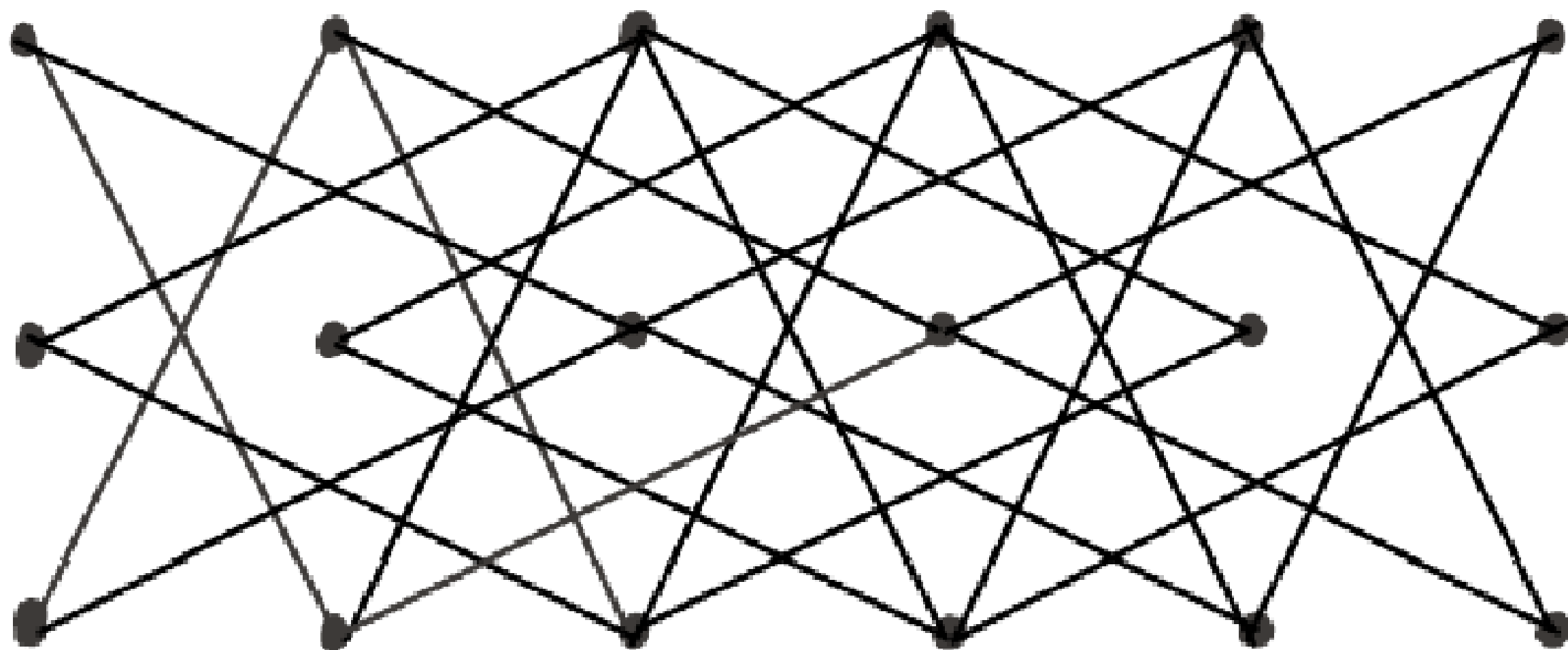
(c) $m=3$ i $n=4, 6$ lub 8 .

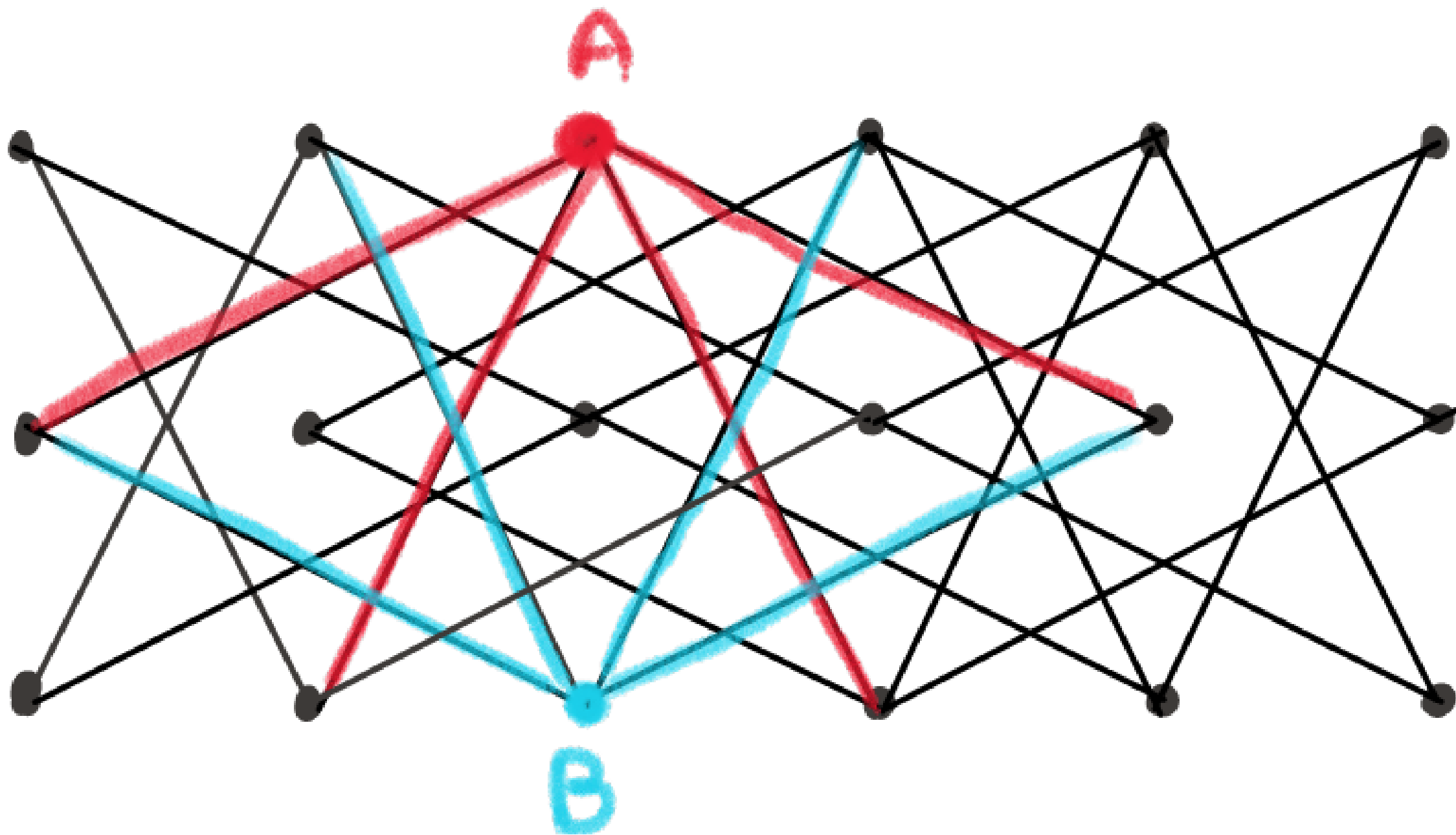
- $m=3$ i $n=4$
Argument taki sam jak dla $m=4$.
- $m=3$ i $n=6$

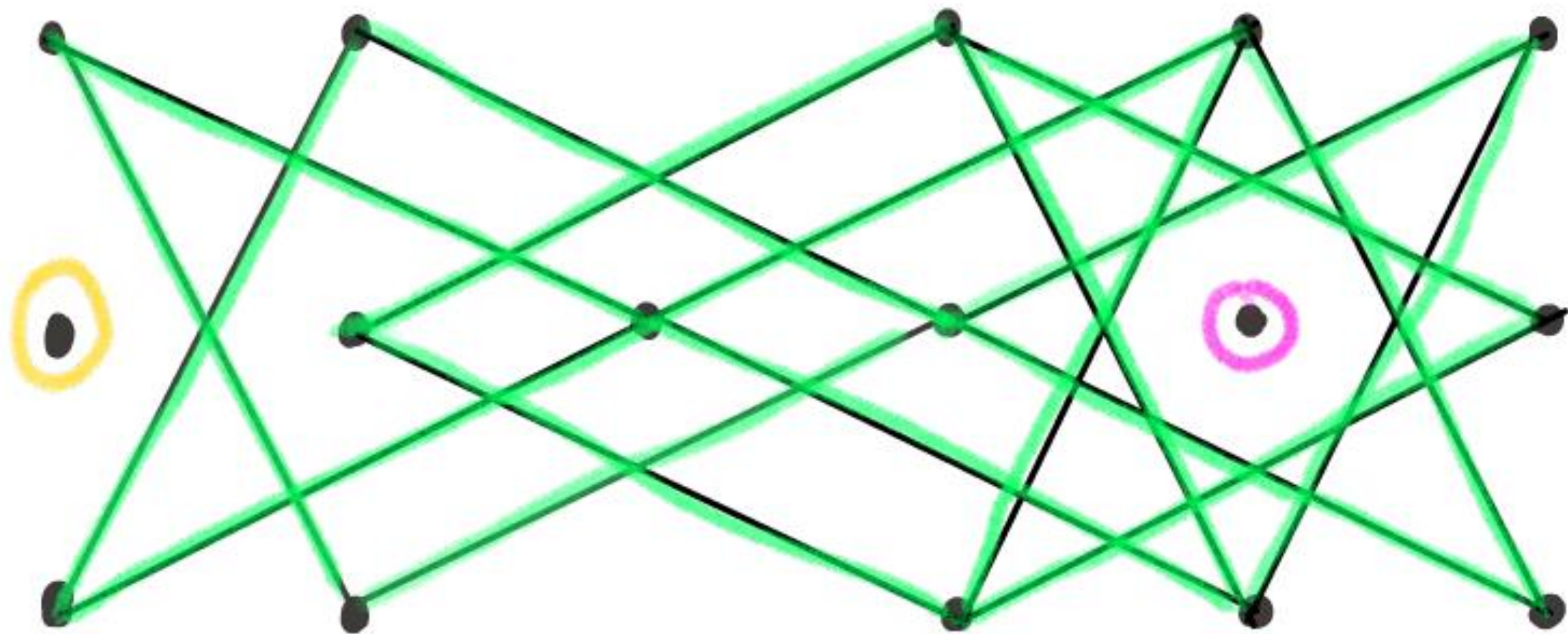
Własność grafu hamiltonowskiego:

Po usunięciu k nieincydentnych wierzchołków dostajemy co najwyżej k spójnych części grafu.





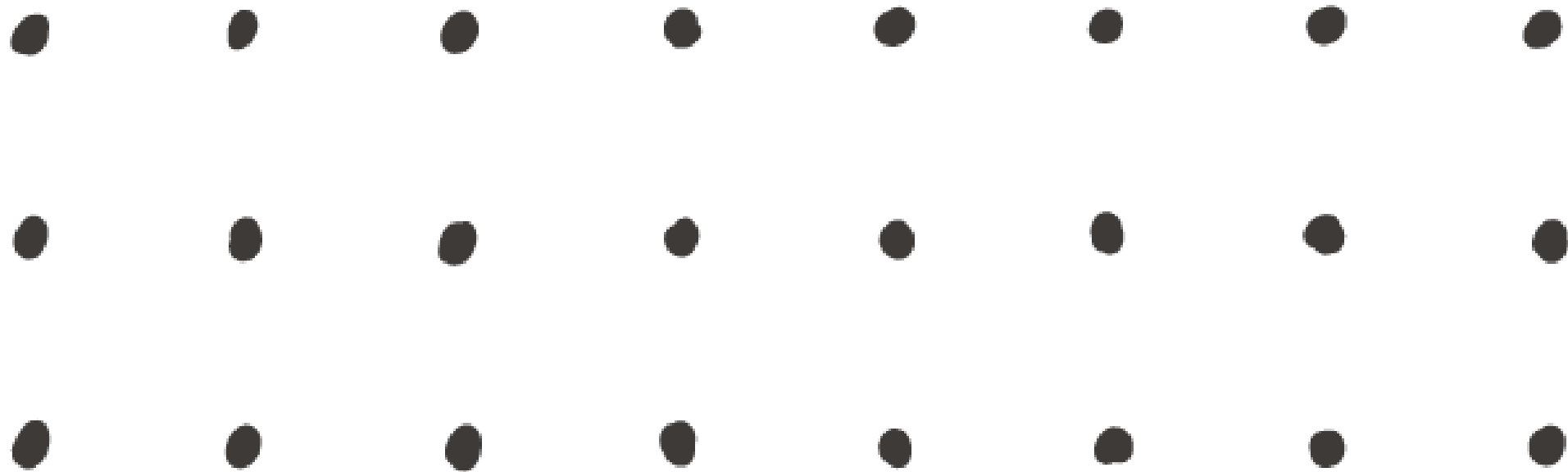


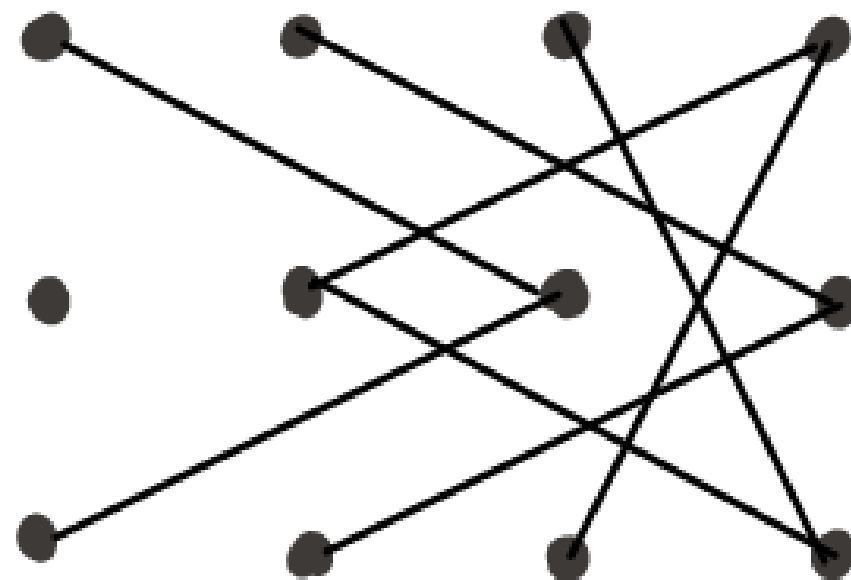
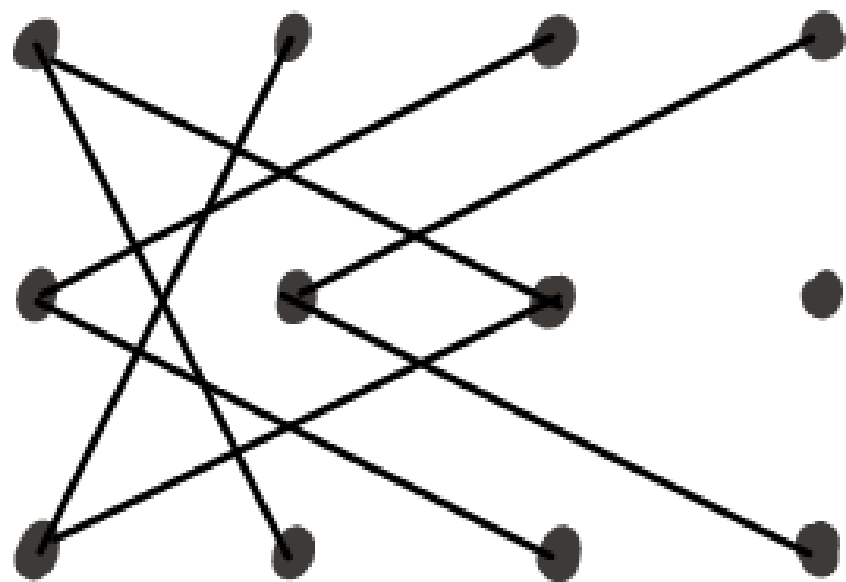


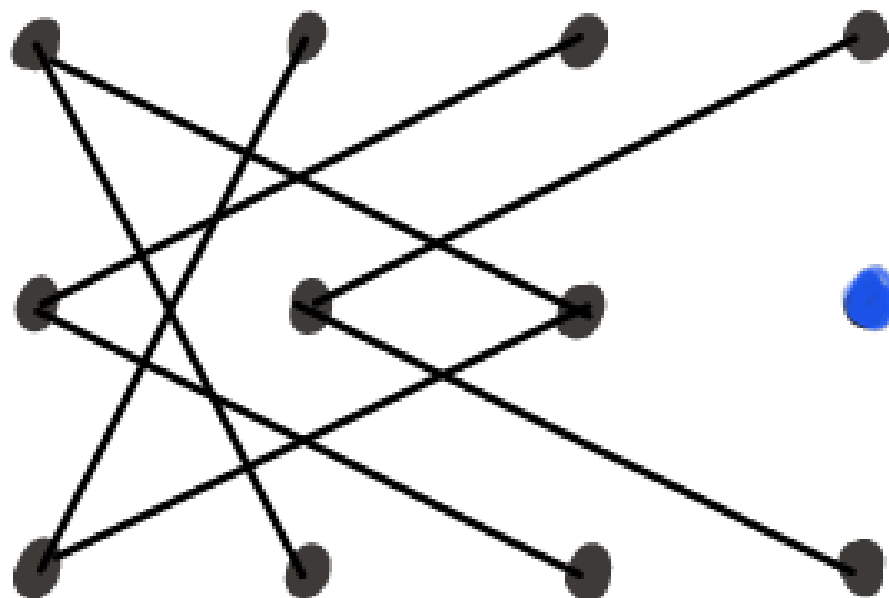
- $m=3$ i $n=8$

Fakt

Dla wierzchołka o stopniu 2, obie krawędzie incydentne z nim muszą być w cyklu Hamiltona.

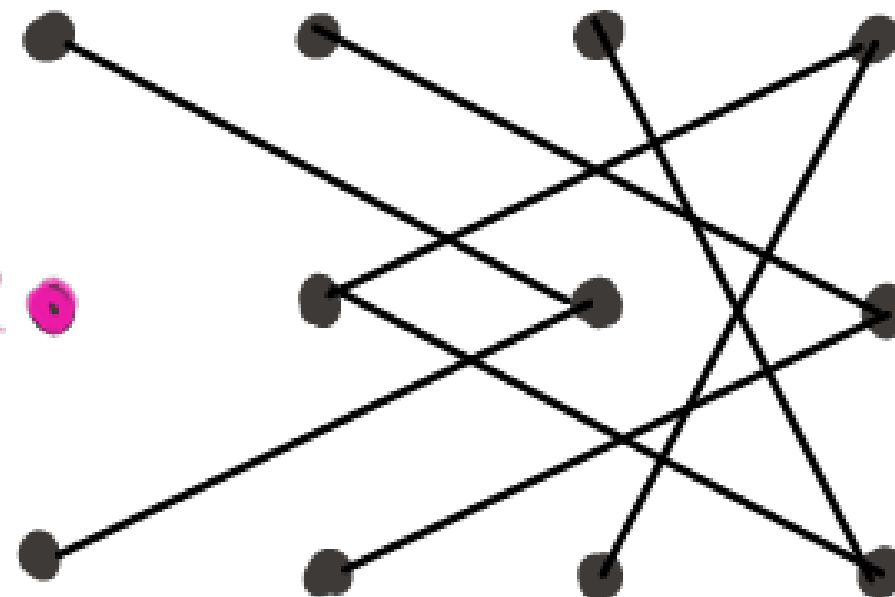


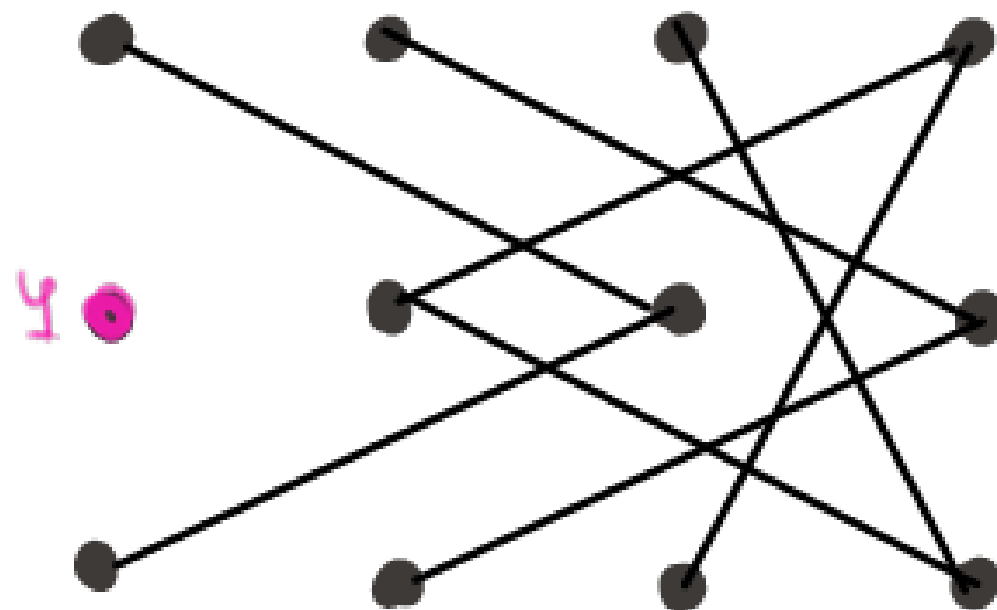
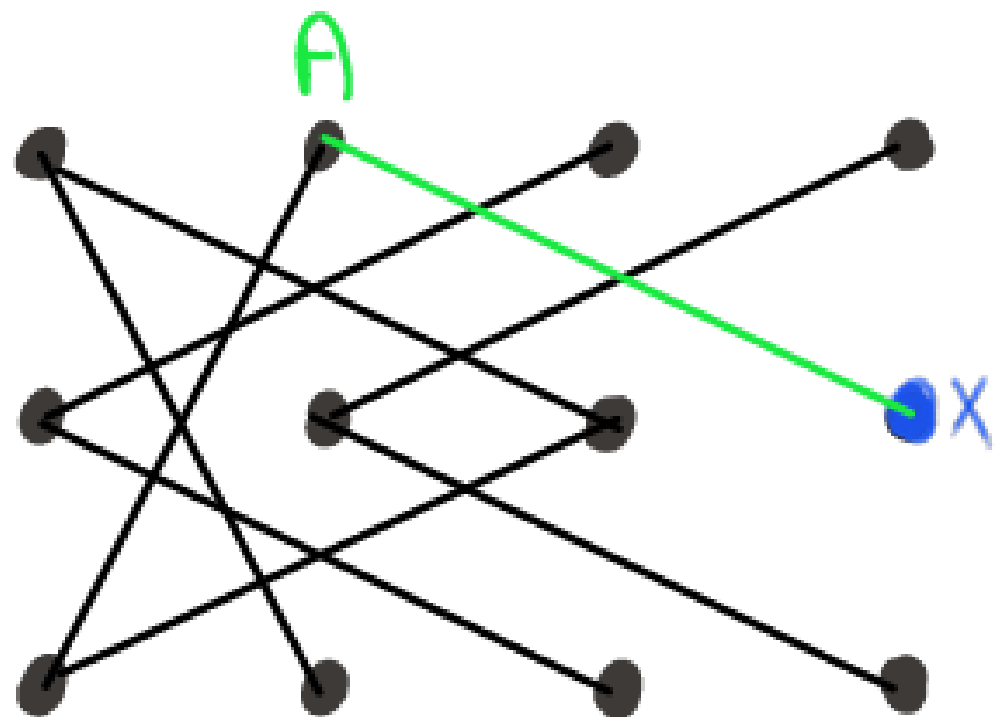


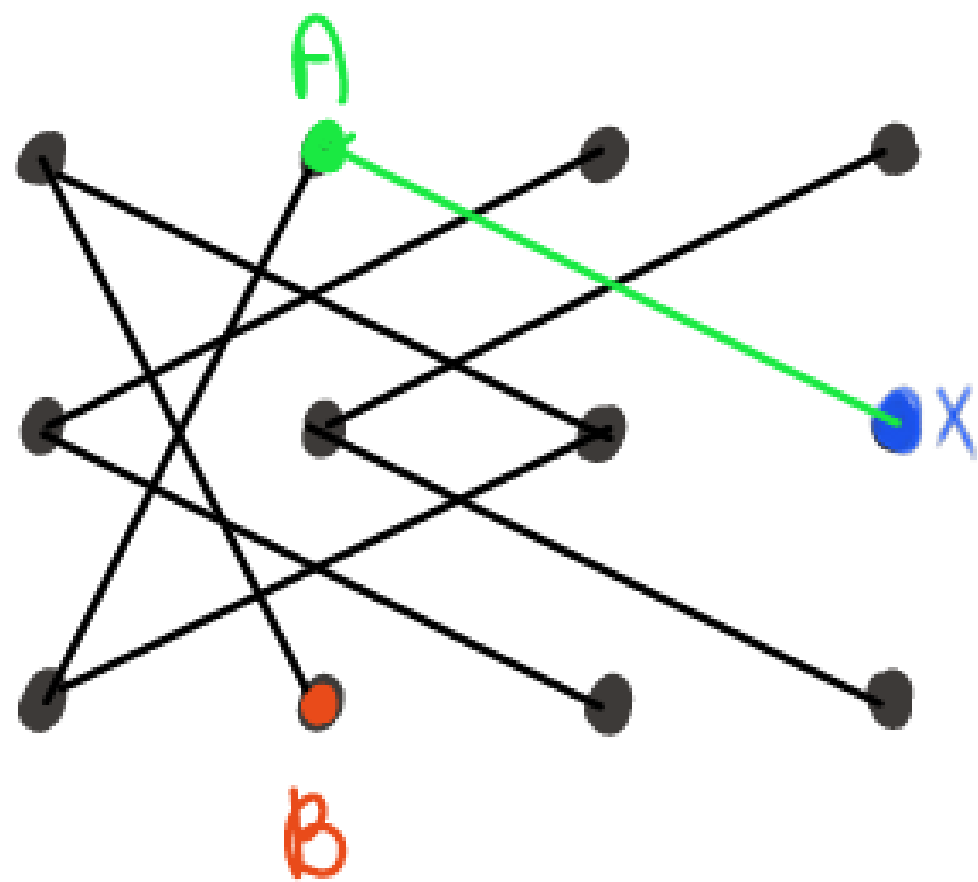


OX

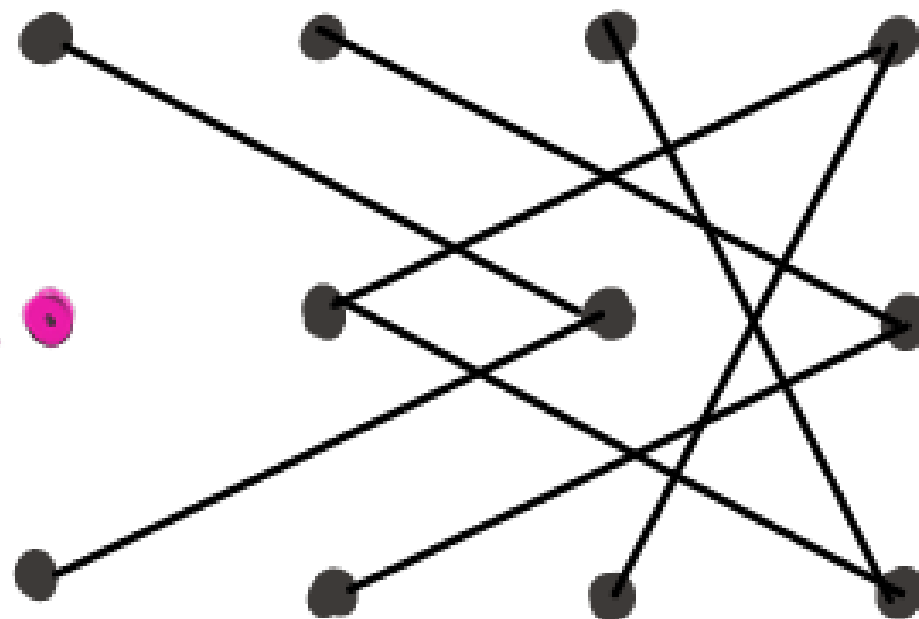
YO

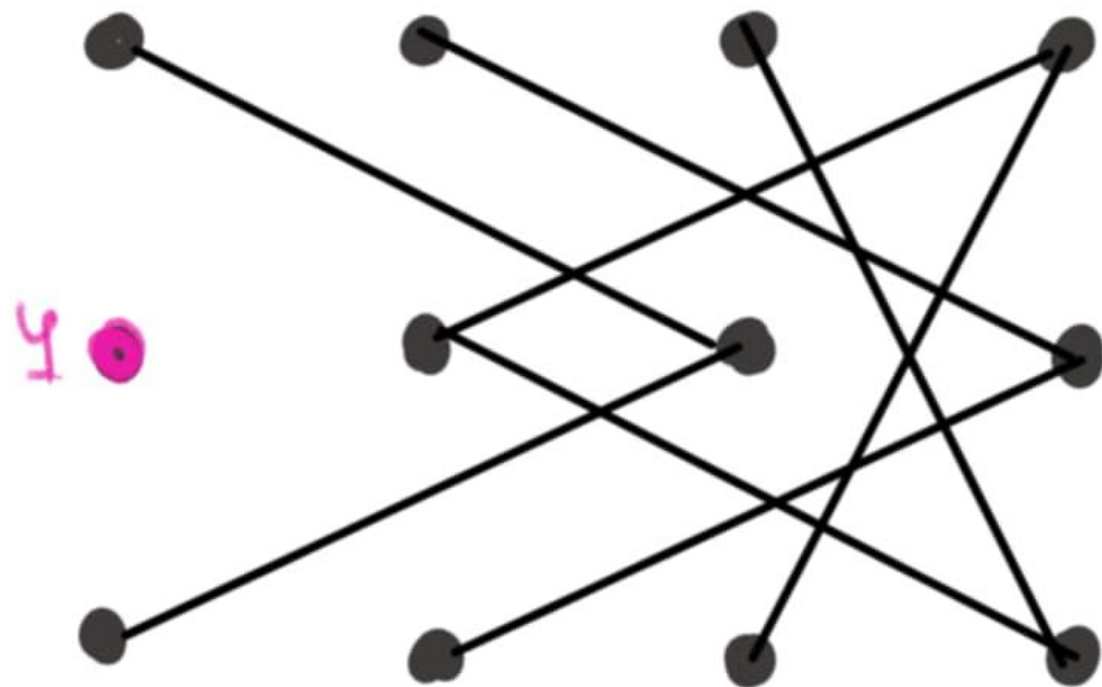
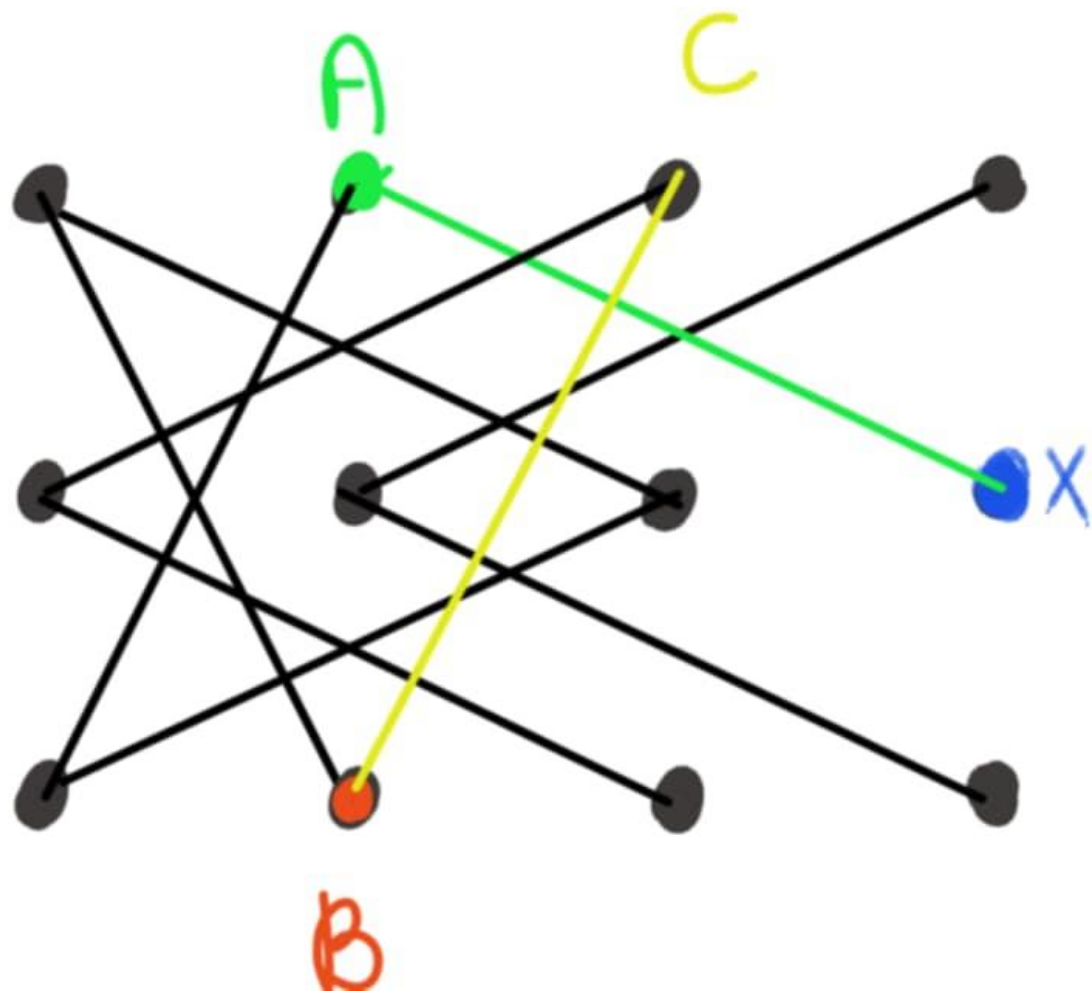


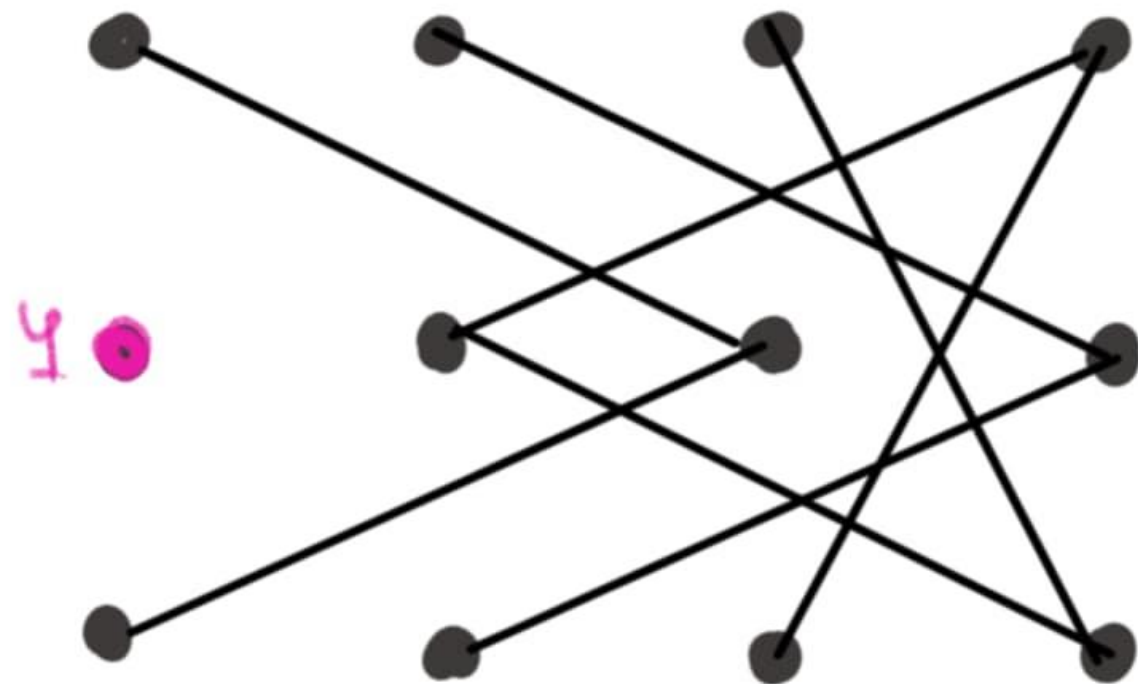
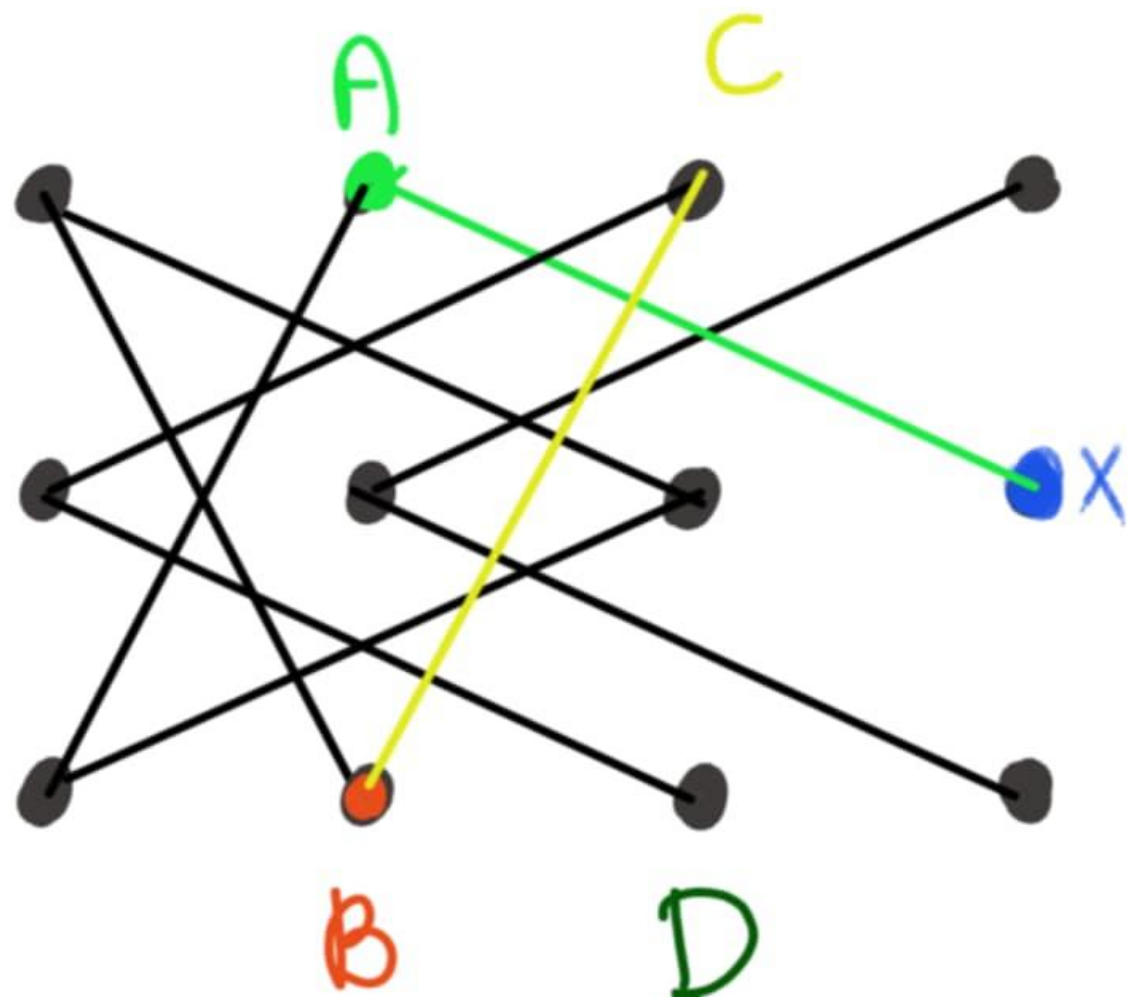


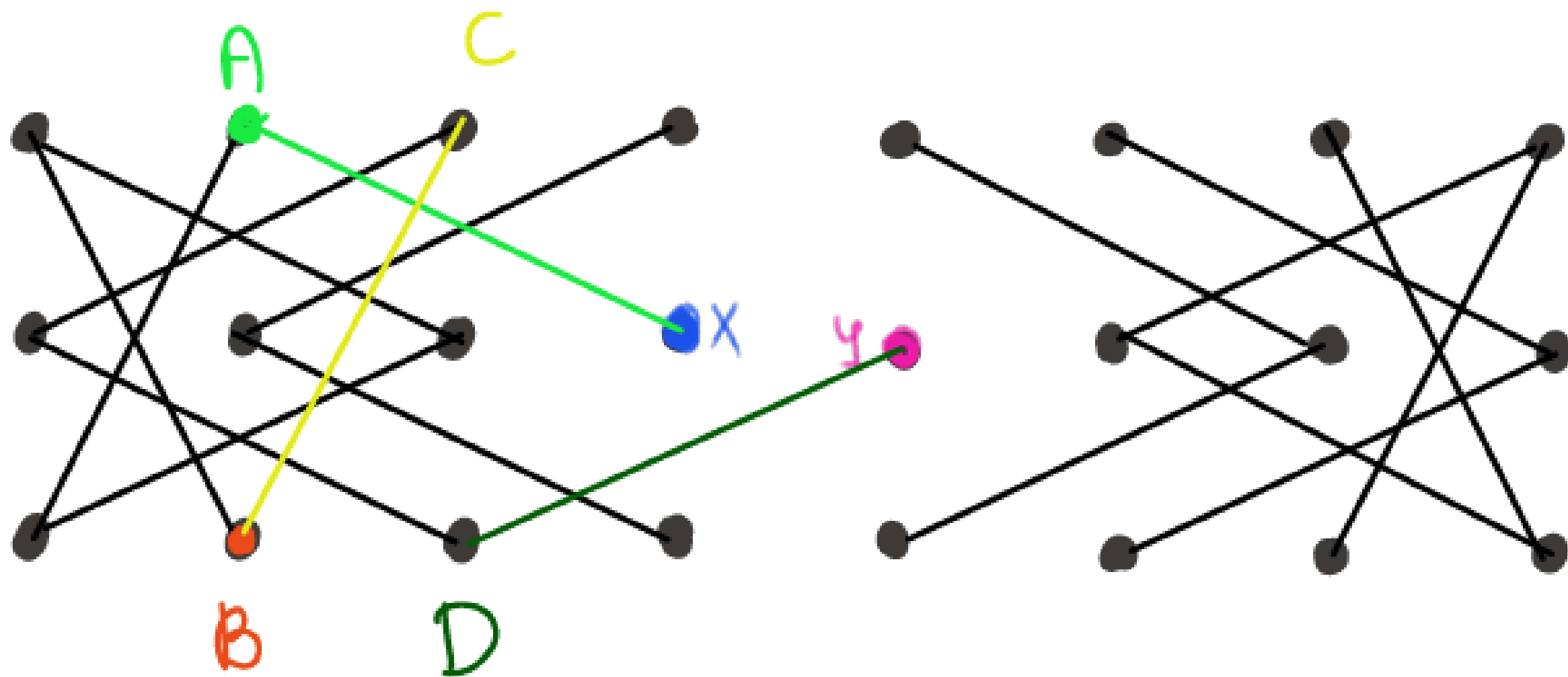


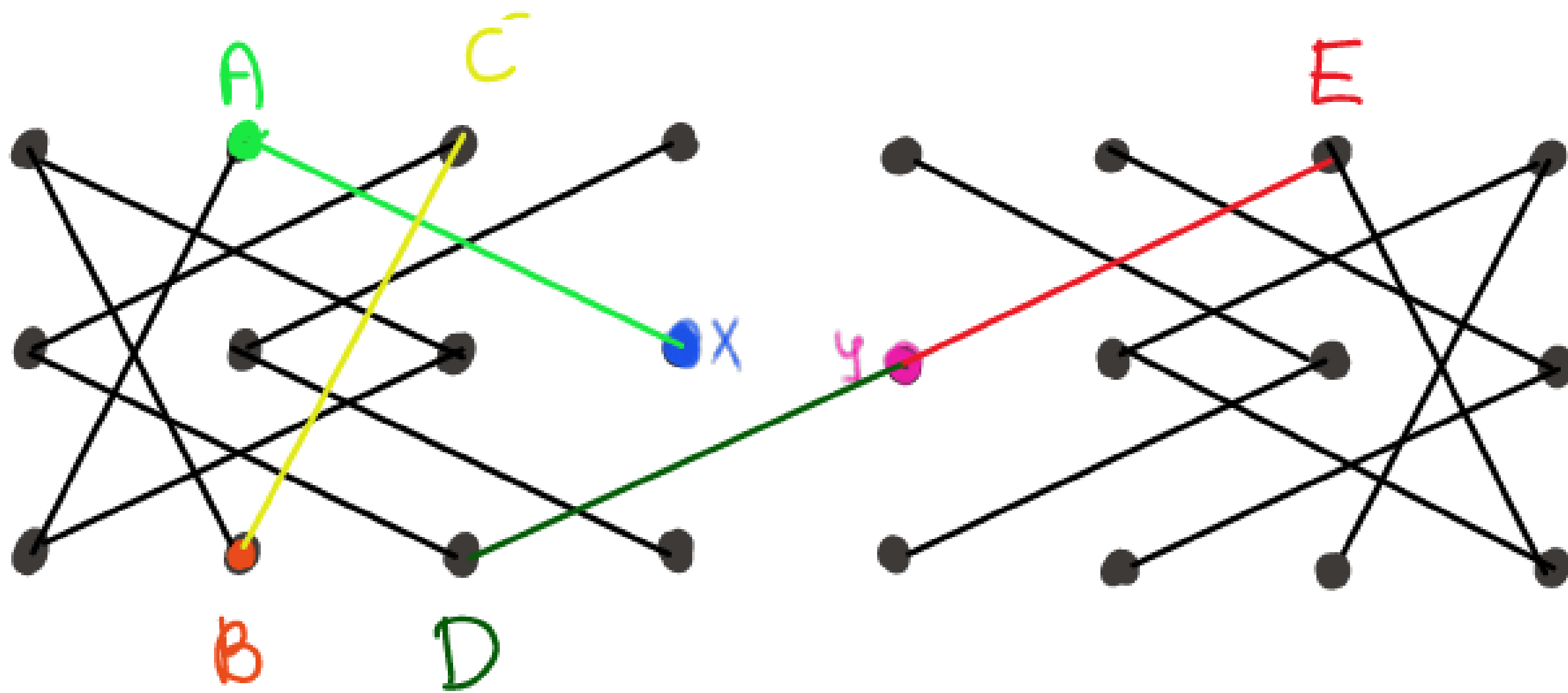
Y

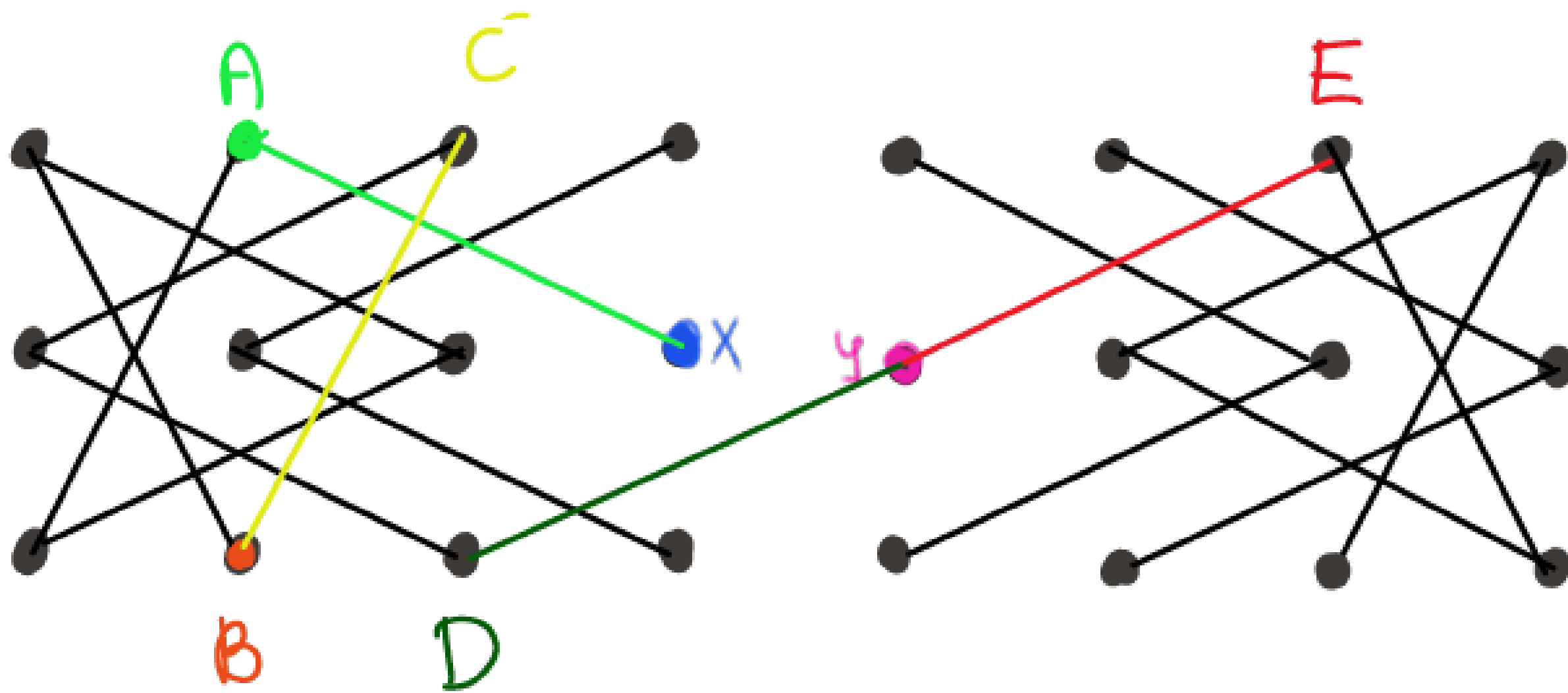


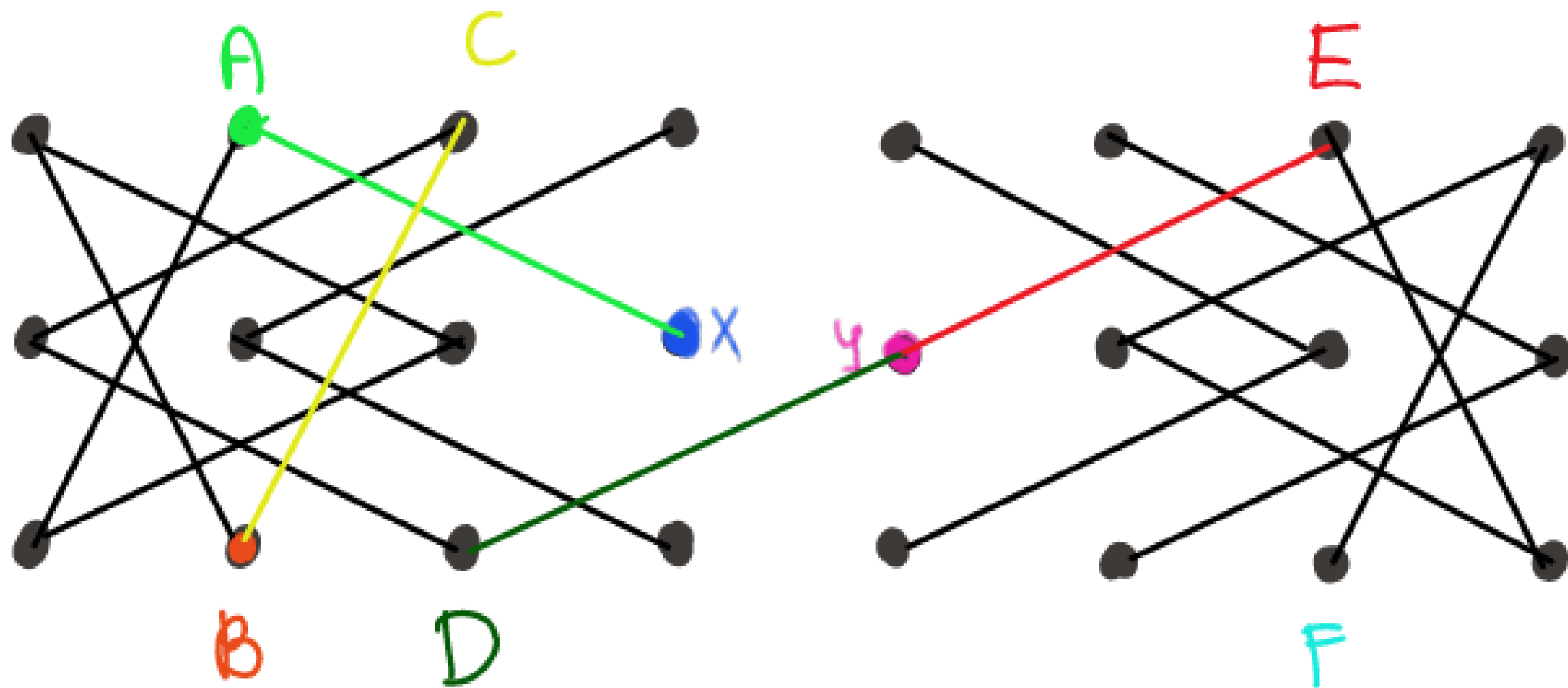


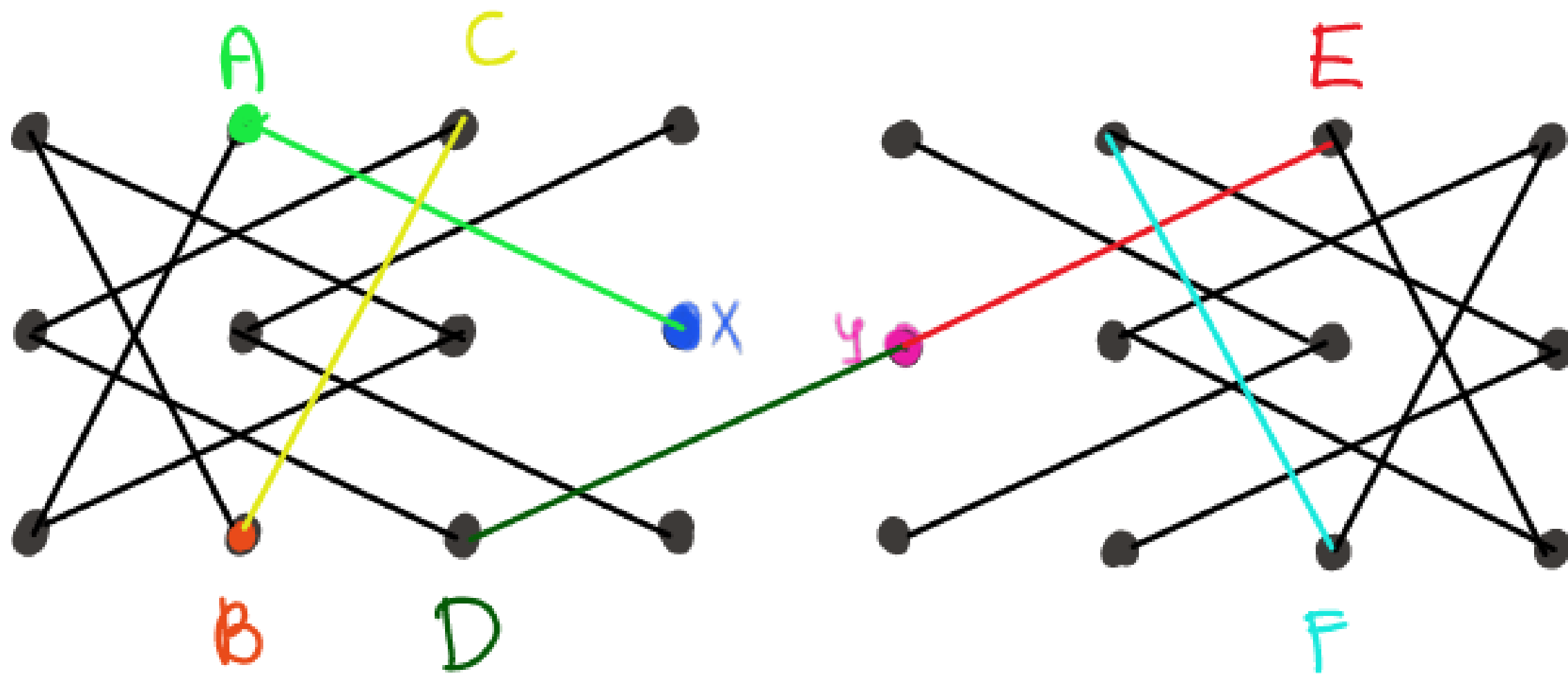


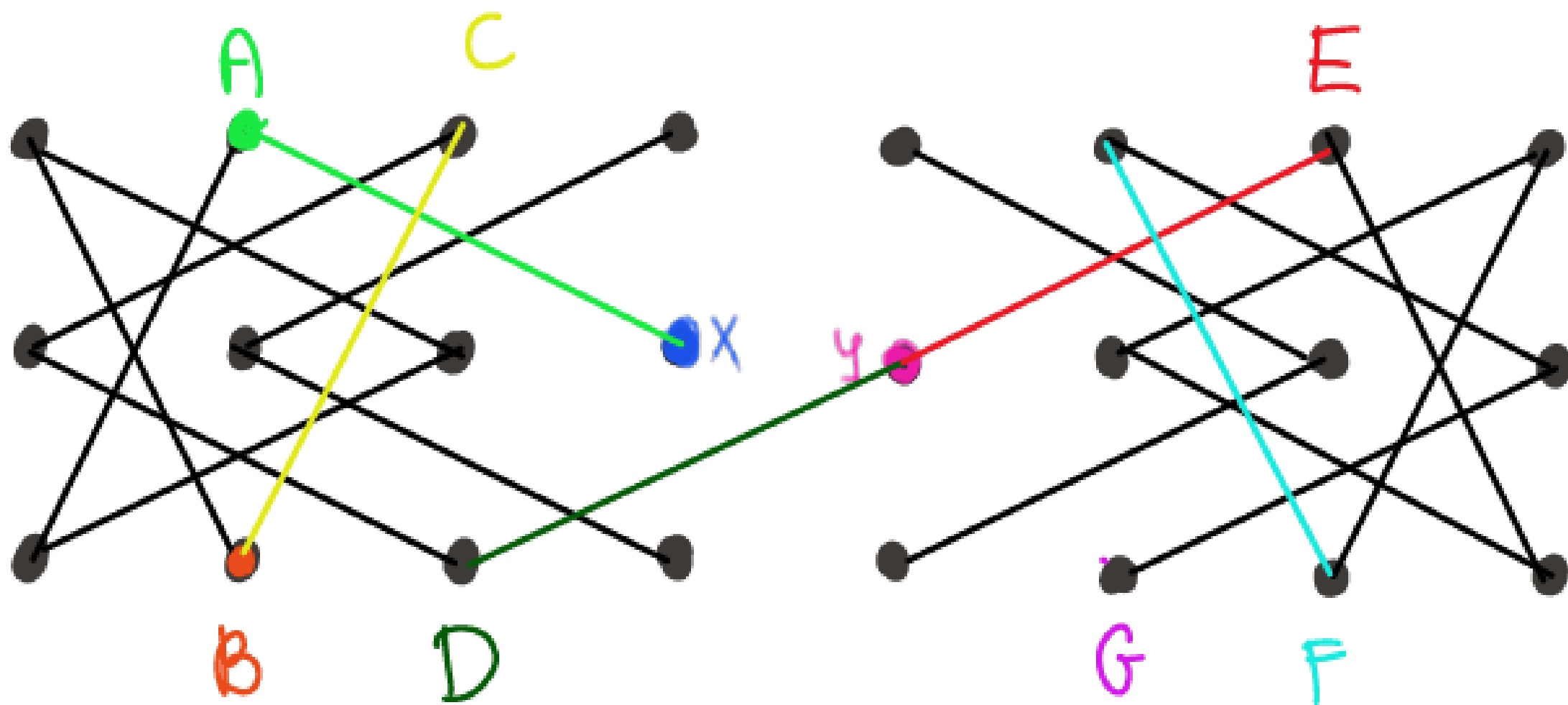


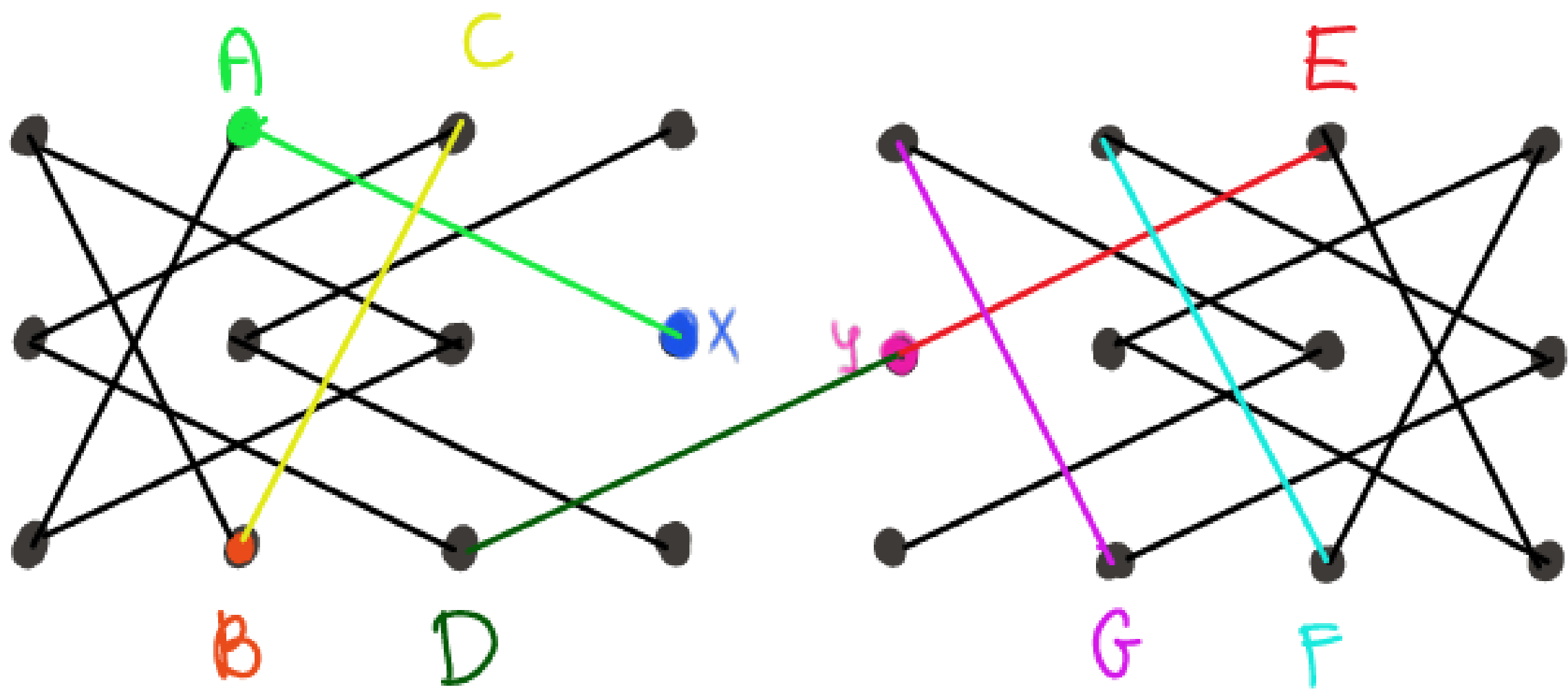


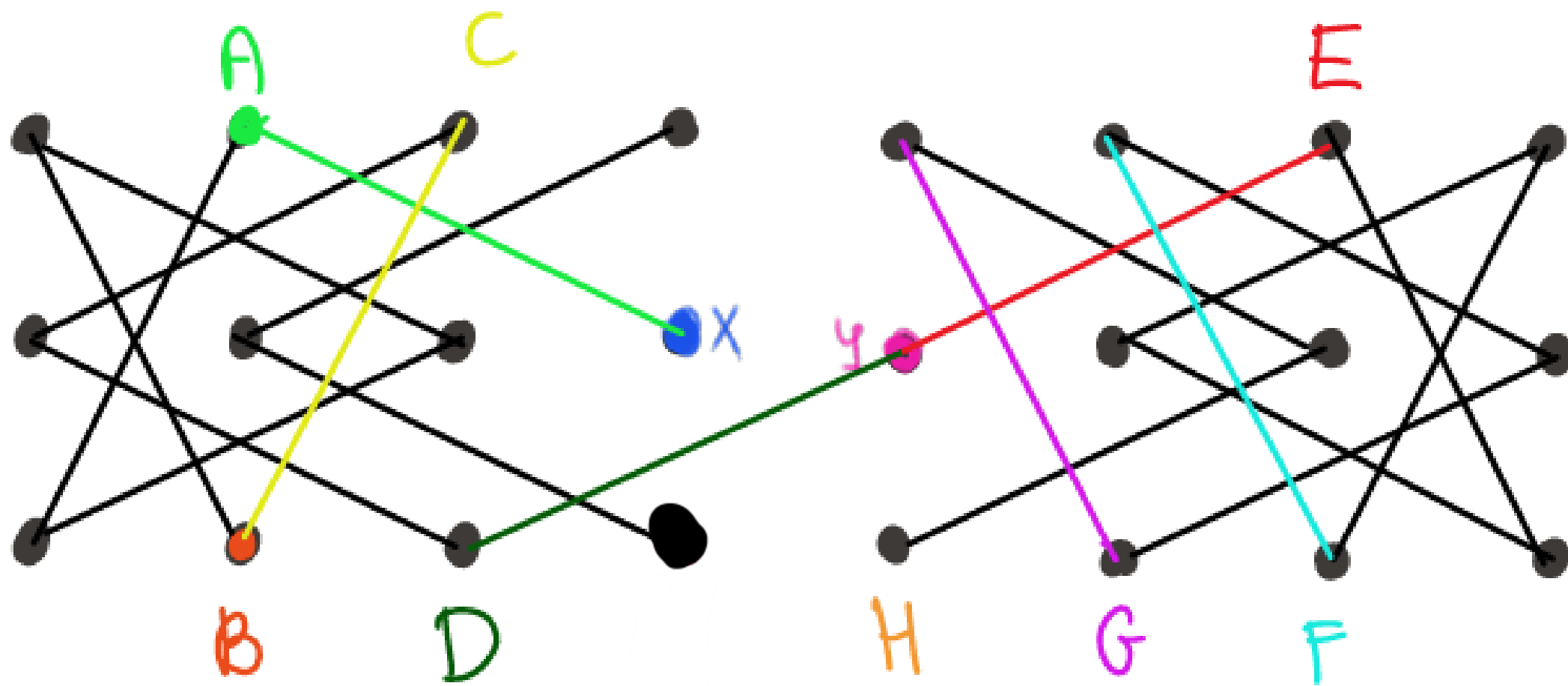


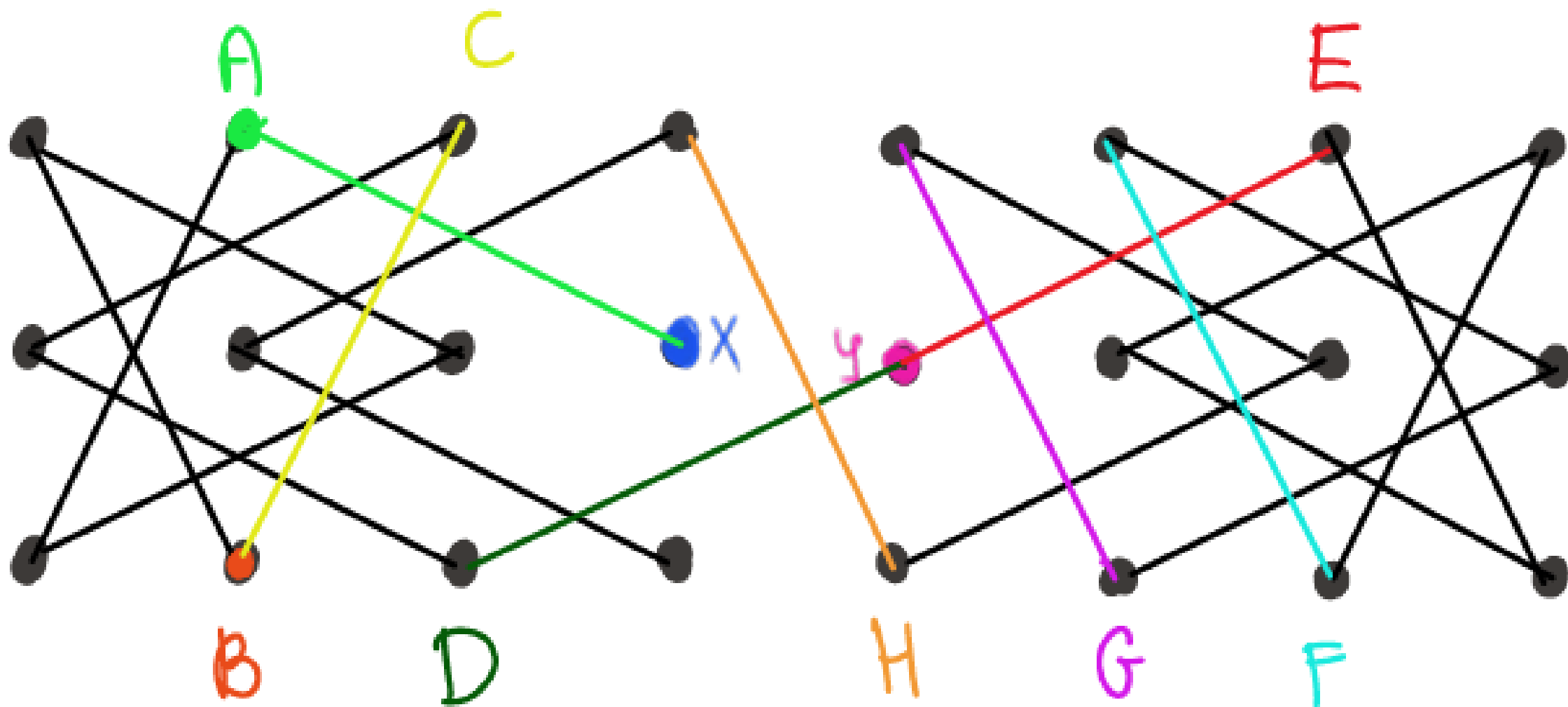


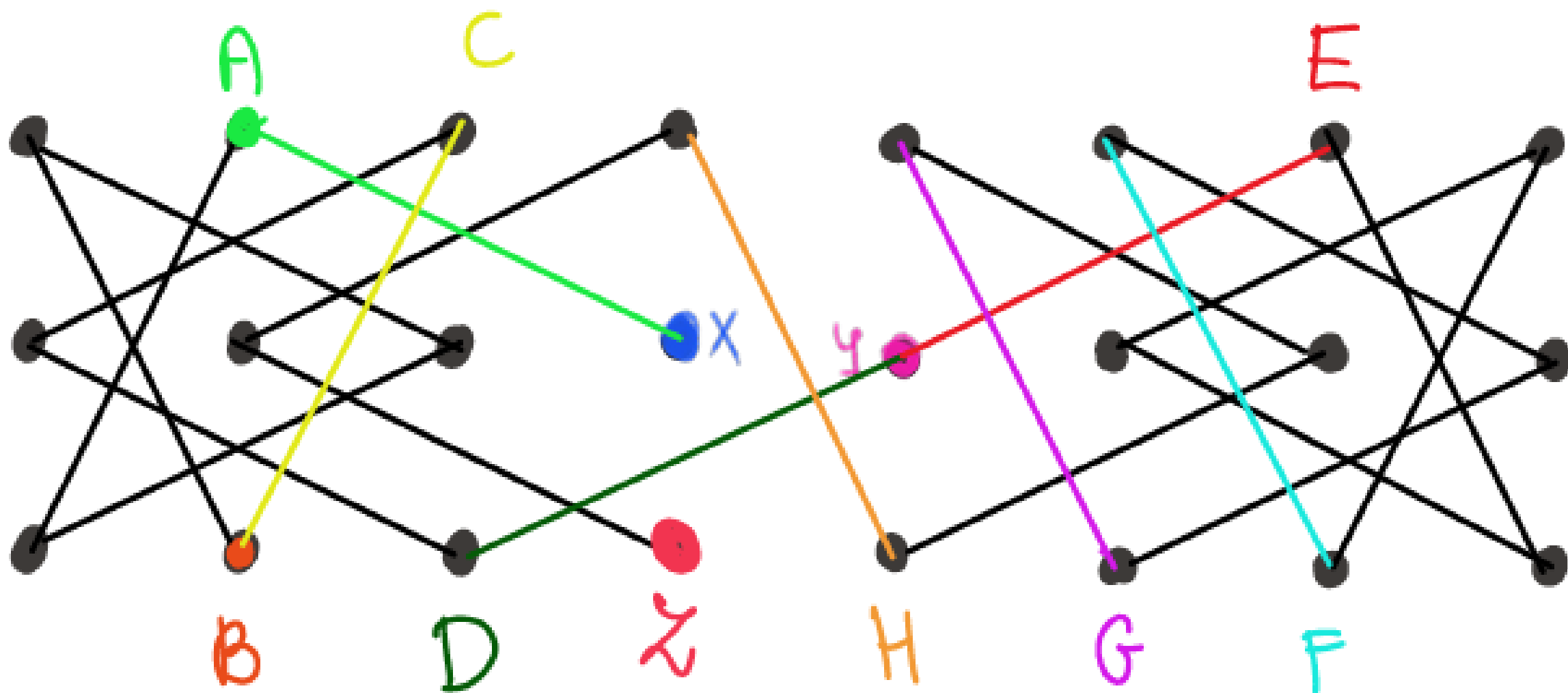












Co z resztą szachownic?

Co z resztą szachownic?

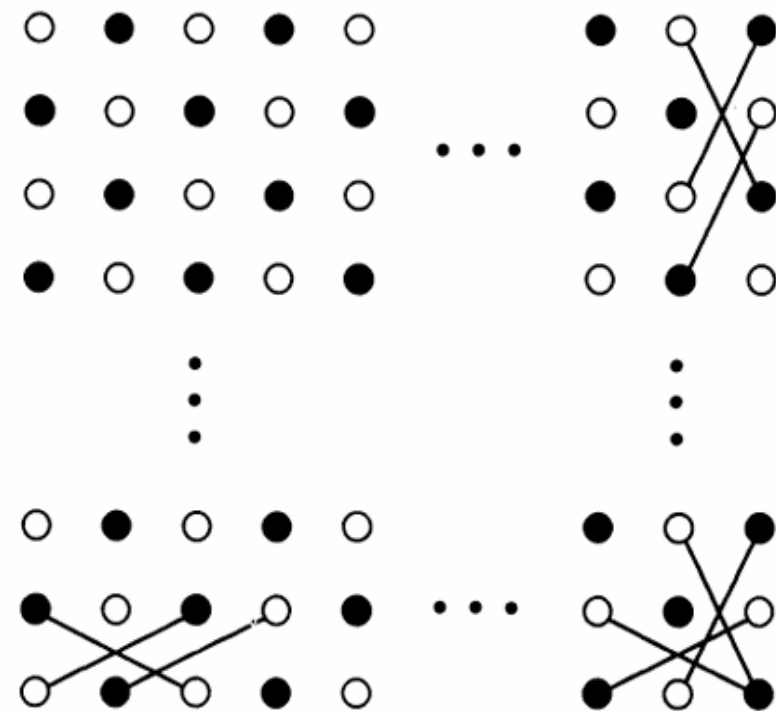
Lemat

Jeśli graf $m \times n$ ma cykl Hamiltona, który zawiera następujące 10 krawędzi:

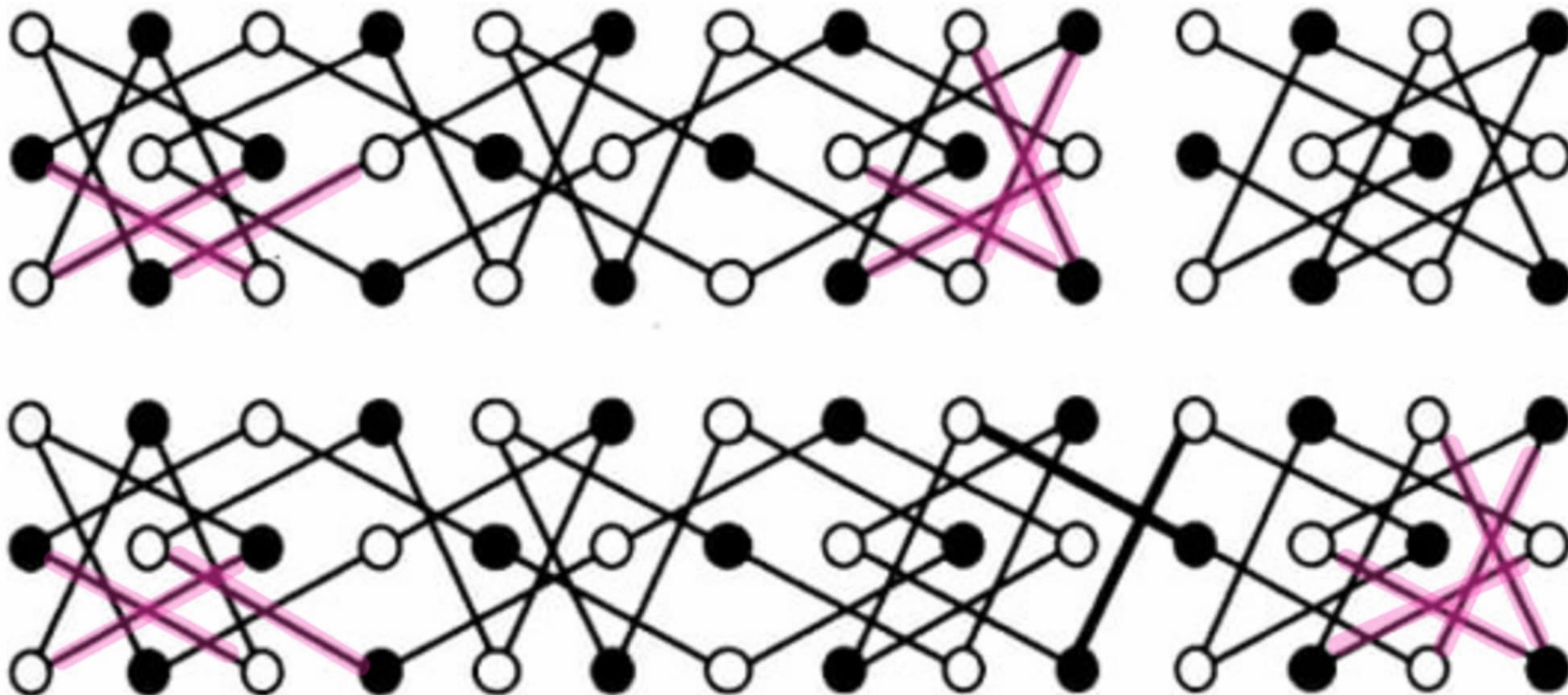
$$\begin{array}{cccc} (1, n-1)-(3, n) & (m-2, n-1)-(m, n) & (m-1, 1)-(m, 3) & (m-1, n-2)-(m, n) \\ (4, n-1)-(2, n) & (1, n)-(3, n-1) & (m-2, n)-(m, n-1) & (m, 1)-(m-1, 3) \\ (m, n-2)-(m-1, n) & (m, 2)-(m-1, 4), & & \end{array}$$

To graf $m \times (n+4)$ również ma cykl Hamiltona zawierający odpowiadające im 10 krawędzi:

$$\begin{array}{ccc} (1, n+3)-(3, n+4) & (m-2, n+3)-(m, n+4) & (m-1, 1)-(m, 3) \\ (m-1, n+2)-(m, n+4) & (4, n+3)-(2, n+4) & (1, n+4)-(3, n+3) \\ (m-2, n+4)-(m, n+3) & (m, 1)-(m-1, 3) & (m, n+2)-(m-1, n+4) \\ (m, 2)-(m-1, 4). & & \end{array}$$



Przykład - grafy 3×10 i $3 \times (10+4)$



Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0]$	$[1,0]$	$[2,0]$	$[3,0]$
$[0,1]$	$[1,1]$	$[2,1]$	$[3,1]$
$[0,2]$	$[1,2]$	$[2,2]$	$[3,2]$
$[0,3]$	$[1,3]$	$[2,3]$	$[3,3]$

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0]$	$[1,0]$	$[2,0]$	$[3,0]$
$[0,1]$	$[1,1]$	$[2,1]$	$[3,1]$
$[0,2]$	$[1,2]$	$[2,2]$	$[3,2]$
$[0,3]$	$[1,3]$	$[2,3]$	$[3,3]$

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0]$	$[1,0]$	$[2,0]$	$[3,0]$
$[0,1]$	<u>$[1,1]$</u>	$[2,1]$	$[3,1]$
$[0,2]$	$[1,2]$	$[2,2]$	$[3,2]$
$[0,3]$	<u>$[1,3]$</u>	$[2,3]$	<u>$[3,3]$</u>

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0]$

$[0,1]$

$[0,2]$

$[0,3]$

$[1,2]$

$[2,2]$

$[2,3]$

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0] \rightarrow 8 \times 8$

$[0,1] \rightarrow 8 \times 5$

$[0,2] \rightarrow 8 \times 6$

$[0,3] \rightarrow 8 \times 3$

$[1,2] \rightarrow 5 \times 6$

$[2,2] \rightarrow 6 \times 6$

$[2,3] \rightarrow 6 \times 3$

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$[0,0]$	$\rightarrow$	8×8
$[0,1]$	$\rightarrow$	8×5
$[0,2]$	$\rightarrow$	8×6
$[0,3]$	$\rightarrow$	8×3
$[1,2]$	$\rightarrow$	5×6
$[2,2]$	$\rightarrow$	6×6
$[2,3]$	$\rightarrow$	6×3

Jakie grafy są naszymi warunkami początkowymi?

$$[0,0] \rightarrow 8 \times 8$$

$$[0,1] \rightarrow 8 \times 5$$

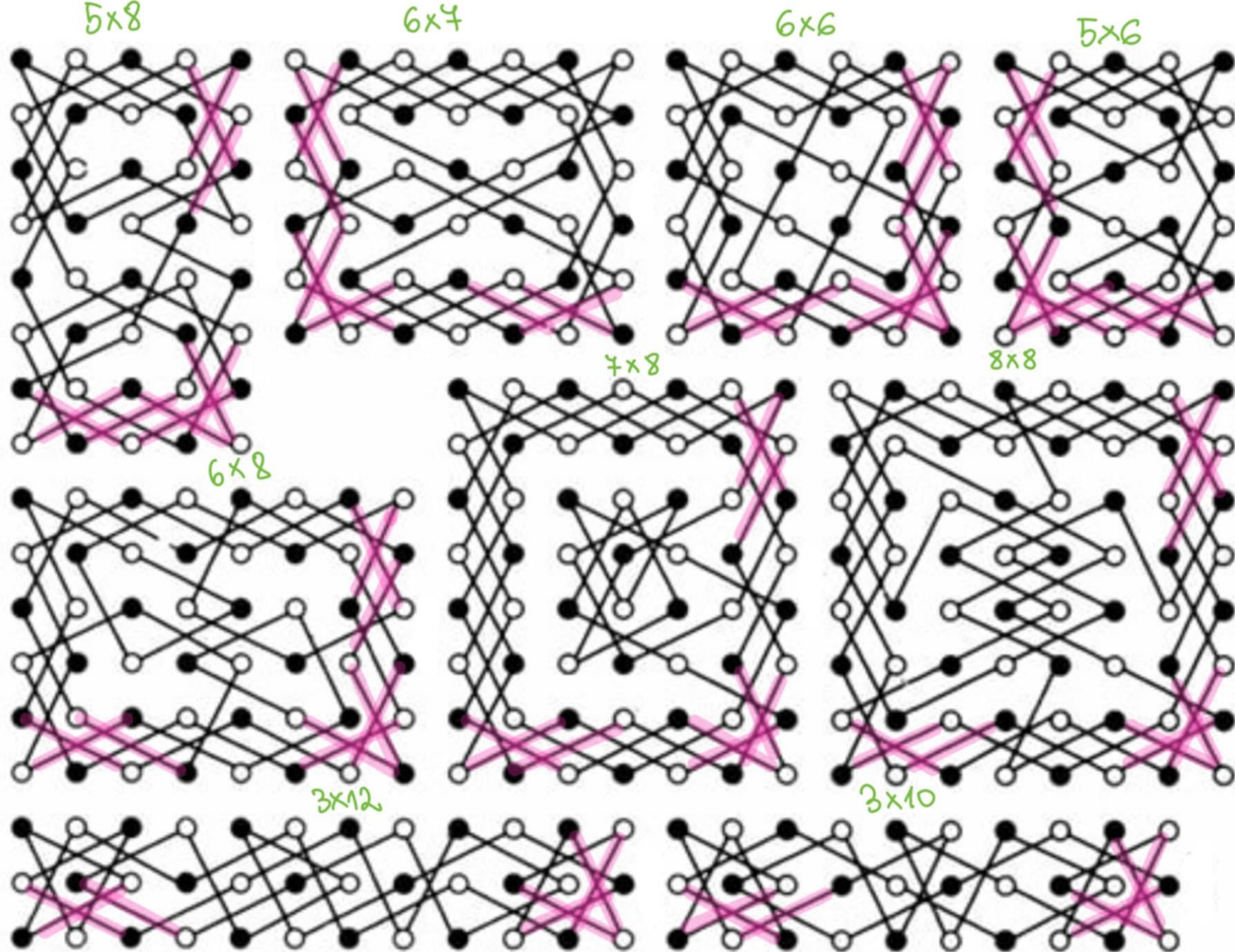
$$[0,2] \rightarrow 8 \times 6$$

$$[0,3] \rightarrow 8 \times 3 \rightarrow 12 \times 3, 8 \times 7$$

$$[1,2] \rightarrow 5 \times 6$$

$$[2,2] \rightarrow 6 \times 6$$

$$[2,3] \rightarrow 6 \times 3 \rightarrow 10 \times 3, 7 \times 6$$



Zródła

- Schwenk, A. J. 1991 *Which rectangular chessboards have a knight's tour?* Mathematics Magazine 64, 325–332.
- Watkins J.J. 2004 *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*